

Renforcement des modèles à événements : application au CECSP et au RCPSP

Margaux Nattaf¹, Christian Artigues¹, Tamás Kis², Pierre Lopez¹

¹ LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INSA, Toulouse, France
{nattaf,artigues,lopez}@laas.fr

² Computer and Automation Research Institute, Hungarian Academy of Sciences, 111 Budapest,
Kende utca 13-17, Hungary
{tamas.kis}@sztaki.hu

Mots-clés : *ordonnancement sous contraintes de ressources, programmation linéaire mixte, inégalités valides, étude polyédrale*

1 Introduction

Nous étudions des problèmes d'ordonnancement sous contraintes de ressources. Plus précisément, nous nous intéressons aux modèles événementiels de programmation linéaire mixte élaborés pour résoudre ces problèmes. Dans ce contexte, nous avons examiné deux problèmes : le problème d'ordonnancement de projet à contraintes de ressources (RCPSP) et le problème d'ordonnancement continu à contraintes énergétiques (CECSP).

Pour résoudre ces deux problèmes tous deux fortement NP-complets dans leurs variantes décisionnelles [1, 3], des modèles de programmation linéaire en nombres entiers ont été développés [2, 3]. Pour le RCPSP, les formulations indexées par le temps restent les plus efficaces. Elles montrent néanmoins leurs limites pour des horizons de planification importants et des durées de tâches disparates, là où les modèles à événements deviennent compétitifs [2]. Pour le CECSP, une solution du problème n'admet pas forcément que des valeurs entières et les formulations à événements permettent de résoudre ces instances de manière exacte [3]. L'amélioration des performances de ces modèles pour les deux types de problèmes considérés est l'objectif recherché dans ces travaux.

2 Définition des problèmes

Dans le CECSP, étant donné une ressource de capacité limitée B et un ensemble de tâches $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$, on cherche un ordonnancement tel que chaque tâche utilise une quantité variable de la ressource $b_i(t)$ comprise entre une valeur minimale b_i^{min} et maximale b_i^{max} et soit exécutée dans sa fenêtre de temps $[r_i, d_i]$. De plus, chaque tâche possède une demande en énergie W_i et l'énergie qui lui est fournie est une fonction f_i de la quantité de la ressource allouée à celle-ci. Nous nous intéressons au cas où cette fonction est croissante, continue et affine, ou concave et affine par morceaux.

L'objectif du CECSP est de déterminer les dates de début st_i et de fin et_i des tâches, ainsi que la fonction d'allocation de ressource $b_i(t)$ associée à chaque tâche de telle sorte que la consommation totale de ressource soit minimisée et que les contraintes suivantes soient vérifiées :

$$r_i \leq st_i < et_i \leq d_i \quad \forall i \in \mathcal{A} \quad (1)$$

$$b_i^{min} \leq b_i(t) \leq b_i^{max} \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall t \in [st_i, et_i] \quad (2)$$

$$\int_{st_i}^{et_i} f_i(b_i(t)) dt = W_i \quad \forall i \in \mathcal{A} \quad (3)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} b_i(t) \leq B \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (4)$$

avec \mathcal{T} l’horizon de temps du problème.

Le problème RCPSP consiste à ordonnancer des tâches consommant une partie d’un sous-ensemble de ressources de \mathcal{R} , chacune étant disponible en quantité limitée B_k , $\forall k \in \mathcal{R}$. Contrairement au CECSP, les tâches ont une durée fixée p_i et consomment une quantité prédéterminée de chaque ressource b_{ik} (possiblement nulle). De plus, tout ordonnancement des tâches doit satisfaire les contraintes de précédence qui existent entre celles-ci.

L’objectif du RCPSP est de déterminer la date de début de chaque tâche st_i de telle sorte que la date de fin du projet soit minimale.

3 Modèles à événements

Contrairement aux modèles indexés par le temps, les modèles à événements se concentrent sur la caractérisation des dates “importantes”, i.e. les événements, du problème. L’ensemble de ces dates est noté \mathcal{E} . Ces derniers peuvent par exemple correspondre aux dates de début et/ou de fin des activités et la date d’un événement individuel est notée t_e . Un ensemble de variables binaires vient ensuite associer chacune de ces dates à un événement. On distingue deux types de modèles suivant le type de variables binaires utilisées : les modèles start/end (SE) et les modèles on/off (OO).

Dans les modèles SE, un ensemble de variables binaires x_{ie} (resp. y_{ie}), $\forall i \in \mathcal{A}$, $\forall e \in \mathcal{E}$ modélise le fait que la tâche i commence (resp. finit) à la date t_e . Dans les modèles OO, un ensemble de variables binaires z_{ie} , $\forall i \in \mathcal{A}$, $\forall e \in \mathcal{E}$ modélise le fait que la tâche i est en cours dans l’intervalle $[t_e, t_{e+1}]$ ($z_{ie} = 1$ dans ce cas).

Pour le RCPSP, ces deux modèles sont présentés dans [2]. Nous avons étendu ces modèles au CECSP et nous avons établi dans [5] un théorème permettant de restreindre l’espace des solutions à celles ayant des fonctions d’allocation de ressource, i.e. $b_i(t)$, constantes par morceaux sans perte d’optimalité. Ce théorème permet la définition des deux modèles à événements présentés ci-dessus au CECSP. Nous prouvons par ailleurs le théorème suivant.

Théorème 1 *Les modèles SE possèdent de meilleures relaxations que les modèles OO.*

En effet, les variables binaires du modèle OO peuvent être écrites comme une fonction linéaire des variables du modèle SE. Ce dernier est donc au moins aussi fort que le modèle OO. Enfin, nous présentons dans [5] un exemple de solution pour la relaxation du modèle OO qui n’est pas solution de la relaxation du modèle SE.

Même si les modèles SE possèdent de meilleures relaxations, ils possèdent aussi un plus grand nombre de variables binaires et des performances moins bonnes en pratique que les formulations OO [2]. De plus, toute inégalité décrite pour le modèle OO peut être réécrite pour le modèle SE de manière directe. Nous nous intéressons donc aux modèles OO dans ce travail.

Dans l’optique de réduire le temps nécessaire pour trouver la solution optimale quand le problème est formulé à l’aide d’un modèle à événements, nous proposons plusieurs ensembles d’inégalités.

4 Inégalités valides pour les modèles à événements

Inégalités de non-préemption Le premier ensemble d’inégalités développées en collaboration avec Tamás Kis [4] correspond à des inégalités dites de non-préemption. Cet ensemble d’inégalités permet de donner une description minimale du polyèdre défini par l’ensemble de toutes les affectations possibles des variables OO z_{ie} , pour une seule activité [4].

Distance maximale entre les événements Le but de cet ensemble d'inégalités est de borner supérieurement la distance entre deux événements consécutifs, i.e. $t_{e+1} - t_e$. Pour définir ces inégalités, nous étudions les fenêtres de temps de chaque date de début et de fin d'une activité. Comme un événement doit avoir lieu dans chacun de ces intervalles, nous savons qu'il y a au moins deux événements consécutifs dans l'union de deux fenêtres de temps consécutives.

Exemple 1

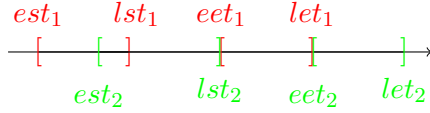


FIG. 1 – Inter

Considérons l'ensemble d'intervalles définis par la figure 1. Les deux premiers intervalles dans l'ordre chronologique sont $[est_1, lst_1]$ et $[est_2, lst_2]$. Le premier événement t_1 appartient nécessairement à l'intervalle $[est_1, lst_1]$ et, de même, $t_2 \in [est_2, lst_2]$.

Nous pouvons donc déduire que les deux événements t_1 et t_2 sont dans l'intervalle $[est_1, lst_2]$ et donc : $t_2 - t_1 \leq lst_2 - est_1$.

Ce raisonnement, défini pour toute paire d'événements consécutifs, peut être généralisé à toute paire d'événements (e, f) avec $e < f$. Un raisonnement similaire permet de déduire des bornes supérieures sur la date d'un événement individuel.

Inégalités dérivées du problème du sac-à-dos Pour le CECSP, le rendement minimal de chaque activité pouvant être positif, nous pouvons considérer les contraintes de type sac-à-dos suivantes pour tout $e \in \mathcal{E}$ et les transformer facilement en inégalités valides :

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} b_i^{min} z_{ie} \leq B \quad \forall e \in \mathcal{E} \quad (5)$$

Pour le RCPSP, ces inégalités correspondent aux contraintes de base limitant l'utilisation des ressources.

5 Résultats expérimentaux

Tous les tests ont été réalisés sur un processeur Intel Core i7-4770 de 3,4 GHz, 8 GB de RAM, tournant sous le système d'exploitation Ubuntu 12.04 à 64 bits. Les programmes linéaires mixtes sont résolus avec le solveur commercial ILOG-Cplex version 12.6.

Les instances du RCPSP utilisées sont les instances définies par Koné [2] pour évaluer les performances des modèles à événements par rapport aux modèles indexés par le temps. Les instances du CECSP utilisées sont, quant à elles, décrites dans [4] où est également détaillé l'algorithme de séparation utilisé pour les inégalités de non-préemption.

Pour le CECSP, le tableau 1 présente le pourcentage d'instances résolues à l'optimum ainsi que le temps nécessaire à leur résolution pour différentes combinaisons d'inégalités ajoutées au modèle. Dans le tableau, ces différentes inégalités sont représentées de la manière suivante : S . représente les inégalités bornant la distance entre deux événements ; D . les inégalités bornant la date des événements ; KP les inégalités déduites du problème du sac-à-dos ; \bar{P} . les inégalités de non-préemption.

Dans le tableau 1, nous pouvons remarquer que le nombre d'instances à 10 et 20 activités résolues est du même ordre de grandeur pour toutes les combinaisons d'inégalités testées. Pour les instances à 25 activités, les résultats sont plus hétérogènes mais les meilleurs résultats sont obtenus en combinant toutes les inégalités. Enfin, pour les instances à 30 activités, les meilleurs résultats sont quant à eux obtenus en combinant seulement inégalités de non-préemption et les deux ensembles d'inégalités portant sur les dates des événements, i.e. S . et D .. Cependant, les résultats obtenus en combinant toutes les inégalités ne sont pas très éloignés de ceux obtenant les meilleurs résultats.

#act. ineg.	10		20		25		30	
	tps(s)	%opt	tps(s)	%opt	tps(s)	%opt	tps(s)	%opt
<i>Aucune</i>	0,3	100	164,14	90	635,4	56	968	10
<i>S. & D. & \bar{P}.</i>	0,6	100	179,8	90	454,4	78	813,8	60
<i>D. & KP & \bar{P}.</i>	0,5	100	170	90	705	67	816	50
<i>S. & D. & KP & \bar{P}.</i>	0,9	100	278,9	82	510	89	802,8	50

TAB. 1 – Résultats du modèle OO pour le CECSP avec différentes combinaisons de coupes.

L’ajout des inégalités a moins d’impact dans le cadre du RCPSP (tableau 2). Cependant, une amélioration des performances du modèle, spécialement pour l’ajout des inégalités *S.* ou \bar{P} ., peut être notée.

#act. ineg.	1 ^{re} sol.		Sol. finale		
	tps(s)	gap	tps(s)	gap	%opt.
<i>Aucune</i>	0,19	3,4	34,8	0	100
<i>S.</i>	0,17	3,2	30,3	0	100
\bar{P} .	0,17	3,8	30,3	0	100
<i>S. & \bar{P}.</i>	0,29	3,3	33,1	0	100

TAB. 2 – Résultats du modèle OO pour le RCPSP avec différentes combinaisons de coupes.

6 Conclusions et perspectives

Les poursuites des recherches dans cette direction sont nombreuses et variées. Dans un premier temps, la mise en place d’inégalités efficaces supprimant les symétries associées à la formulation OO semble être une piste prometteuse. En effet, un point faible des modèles à événements est le nombre important de symétries, i.e. d’affectation des variables conduisant à la même solution.

Une autre piste serait la recherche de facettes du polytope des solutions ou d’un sous-polytope engendré par seulement une partie des contraintes pourrait apporter des résultats intéressants.

Références

- [1] J. Błażewicz and J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan. Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity. *Discrete Applied Mathematics*, 5(1):11–24, 1983.
- [2] O. Koné, C. Artigues, P. Lopez and M. Mongeau (2011). Event-based MILP models for resource-constrained project scheduling problems. *Computers & Operations Research*, 38(1):3–13.
- [3] M. Nattaf, C. Artigues, P. Lopez and D. Rivreau (2016). Energetic reasoning and mixed-integer linear programming for scheduling with a continuous resource and linear efficiency functions. *OR Spectrum*, 38(2):459–492.
- [4] M. Nattaf, T. Kis, C. Artigues and P. Lopez (2016). Polyhedral results and valid inequalities for the Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01391403>.
- [5] M. Nattaf (2016). *Ordonnancement sous contraintes énergétiques*. Thèse, Université Paul Sabatier - Toulouse III, Octobre 2016.