

Problème de Somme Coloration Minimale : Borne inférieure de la somme chromatique et borne supérieure de la force du graphe

Clément Lecat¹, Corinne Lucet¹, Chu-Min Li¹

Laboratoire de Modélisation, Information et Système EA 4290, Université de Picardie Jules Verne,
Amiens, France

{clement.lecat, corinne.lucet, chu-min.li}@u-picardie.fr

Mots-clés : *graphe, coloration, somme chromatique, force, bornes.*

1 Introduction

Le Problème de Somme Coloration Minimale (*MSCP*) d'un graphe G est un problème de coloration NP-difficile [4], dont l'objectif est de déterminer une solution valide minimisant la somme des poids associés à chaque couleur utilisée. Cette somme est appelée la *somme chromatique*, notée $\Sigma(G)$. Le nombre minimum de couleurs nécessaires à l'obtention d'une solution optimale pour *MSCP* est appelé la force du graphe, notée $s(G)$. Celle-ci peut arbitrairement être plus grande que le *nombre chromatique* du graphe, noté $\chi(G)$. L'intérêt de *MSCP* n'est pas seulement théorique. En effet, *MSCP* trouve ses applications dans de nombreux domaines, tels que l'allocation de ressources distribuées, les problèmes d'ordonnancement et plus particulièrement dans la gestion de flux (population, réseau, transport ...) [1], pour lequel *MSCP* a la particularité de pouvoir apporter une solution permettant de garantir la qualité de service, en minimisant le délai moyen d'attente. Pour illustrer cela, nous considérons le problème d'allocation de ressources (*ARP*) suivant : soit un ensemble de processus $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ devant être exécutés sur un ensemble de processeurs $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ (Figure 1). L'exécution d'un processus nécessite une unité de temps et requiert un ensemble de processeurs. Deux processus partageant une même ressource ne peuvent donc être exécutés simultanément. Un *graphe des conflits* (Figure 2) permet de modéliser l'ensemble des contraintes d'un tel problème, où un sommet représente un processus et une arête un conflit entre deux processus. Une coloration du graphe des conflits fournit un ordonnancement pour l'exécution des processus, chaque couleur étant associée à une date de début. Nous pouvons observer sur la Figure 2 qu'une solution minimisant le nombre de couleurs ($\chi(G) = 2$) a un temps de réponse moyen de 1.5 $((4 \times 1 + 4 \times 2)/8)$ alors qu'une solution utilisant une couleur supplémentaire ($s(G) = 3$) permet d'obtenir un temps de réponse moyen de 1.3 $((6 \times 1 + 2 + 3)/8)$. Minimiser la date de fin correspond donc à rechercher $\chi(G)$ alors que minimiser le temps moyen de réponse revient à résoudre *MSCP*.

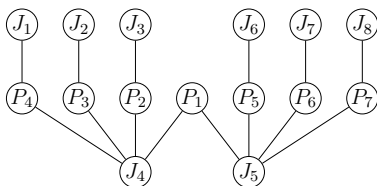


FIG. 1 – Un ARP

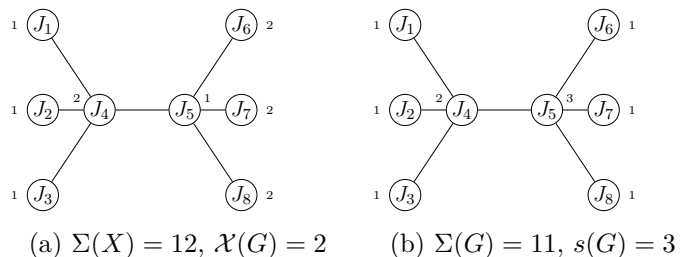


FIG. 2 – Graphe des conflits

Les méthodes de résolution du problème *MSCP* se divisent en deux catégories, les méthodes exactes, basées sur des techniques de Branch-and-Bound, programmation linéaire, CSP, Max-SAT/MinSAT et les méthodes approchées basées sur des heuristiques/meta-heuristiques.

Cependant, *MSCP* étant un problème NP-difficile, seuls de petits graphes sont résolus de manière exacte. À travers ce papier, nous présentons une nouvelle notion, appelée *motif*, permettant une abstraction de l'espace de recherche du problème *MSCP*, afin de pouvoir construire une nouvelle borne supérieure *UBMs* de la force du graphe $s(G)$ ainsi qu'une nouvelle borne inférieure *LBMΣ* de la somme chromatique $\Sigma(G)$. Les résultats expérimentaux ont été effectués sur les benchmarks DIMACS [3] et COLOR [2] et sont détaillés dans [5, 6].

Ce papier est organisé de la façon suivante : la section 2 présente les définitions nécessaires au développement des propriétés proposées. La section 3 expose la notion de motif et introduit les différentes propriétés utiles à la construction des bornes *UBMs* et *LBMΣ*. La section 4 introduit les bornes *UBMs* et *LBMΣ*.

2 Définitions

Soit $G(V, E)$ un graphe non orienté où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Nous notons $n = |V|$. Le voisinage $\mathcal{N}(v)$ d'un sommet $v \in V$ est défini comme suit : $\mathcal{N}(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$. $\Delta(G) = \max\{|\mathcal{N}(v)| \mid v \in V\}$ est le degré de G . Un stable S est un sous-ensemble de V tel que $\forall v, u \in S, (u, v) \notin E$. La cardinalité du stable maximum est notée $\alpha(G)$. Une coloration de G est une fonction $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ qui assigne à chaque $v \in V$ une couleur $c(v)$ représentée par un entier. L'ensemble des sommets v de G tel que $c(v) = i$ forme un stable appelé *classe couleur* X_i . Une coloration X de G peut donc être représentée par un ensemble de classes couleur ($X = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$). Il est à noter que pour *MSCP*, un poids w_i est associé à chaque classe couleur X_i tel que $w_i = i$. La somme des poids associés à une coloration est notée $\Sigma(X)$ ($\Sigma(X) = \sum_{i=1}^k i \times |X_i|$). Si nous nous référons à la Figure 2b, la coloration $\{\{J_1, J_2, J_3, J_6, J_7, J_8\}_1, \{J_4\}_2, \{J_5\}_3\}$ représente une coloration valide telle que $\Sigma(X) = \Sigma(G) = 11$.

L'une des spécificités de l'espace de recherche des problèmes de coloration est le nombre important de symétries. En effet, la permutation de deux classes couleurs n'impacte pas la validité de la solution. Ainsi, la permutation de l'ensemble des classes couleur de X forme une classe d'équivalence notée $\Theta(X)$. Cependant, dans le cas de *MSCP*, cette spécificité est un inconvénient conséquent car deux colorations symétriques n'ont pas nécessairement une somme coloration associée identique comme l'illustrent les deux colorations symétriques suivantes : $X = \{\{J_1, J_2, J_3, J_6, J_7, J_8\}_1, \{J_4\}_2, \{J_5\}_3\}$ ($\Sigma(X) = 11$) et $X' = \{\{J_5\}_1, \{J_4\}_2, \{J_1, J_2, J_3, J_6, J_7, J_8\}_3\}$ ($\Sigma(X') = 21$). Afin de réduire l'espace de recherche de *MSCP*, il est possible de ne considérer que la *coloration majeure* $X^m \in \Theta(X)$ telle que $|X_1^m| \geq |X_2^m| \geq \dots \geq |X_k^m|$ puisque $\forall X \in \Theta(X), \Sigma(X^m) \leq \Sigma(X)$. Par conséquent, dans la suite de ce papier, nous ne considérons que les colorations majeures.

3 Motifs

À chaque coloration majeure X , il est possible d'associer une séquence d'entiers décroissante p , appelée *motif*, telle que $p(X) = (|X_1|, |X_2|, \dots, |X_k|)$, où $p[i] = |X_i|$ et $|p| = k$. Soit la coloration $X = \{\{J_1, J_2, J_3, J_6, J_7\}_1, \{J_4\}_2, \{J_5\}_3, \{J_8\}_4\}$, et le motif associé $p(X) = (5, 1, 1, 1)$, où $p[1] = 5$, $p[2] = 1$, $p[3] = 1$, $p[4] = 1$ et $|p(X)| = 4$. Nous remarquons que la coloration majeure associée à un motif n'est pas unique. En effet, les motifs associés aux colorations $\{\{J_1, J_2, J_3, J_6, J_7\}_1, \{J_4\}_2, \{J_5\}_3, \{J_8\}_4\}$ et $\{\{J_2, J_3, J_6, J_7, J_8\}_1, \{J_4\}_2, \{J_5\}_3, \{J_1\}_4\}$ sont identiques. Ainsi, la modélisation de l'espace de recherche à l'aide de motifs permet une réduction importante de la taille de ce dernier. De plus, tous les motifs pour lesquels $p[1] > \alpha(G)$ ne peuvent représenter une coloration valide car aucune classe couleur ne peut être de cardinalité supérieure à celle du stable maximum.

Nous notons $\phi(n)$ l'ensemble des motifs pour le graphe $G(V, E)$ et $\phi(n, k)$ l'ensemble des motifs p tels que $\forall p \in \phi(n, k), |p| = k$. Nous remarquons qu'il existe un ordre lexicographique sur les ensembles $\phi(n, k)$ où p_k^i représente le i ème motif de $\phi(n, k)$ suivant cet ordre. Si nous considérons l'ensemble $\phi(8, 3)$ associé à un graphe de 8 sommets, le motif $p = (6, 1, 1)$ précède lexicographiquement le motif $p' = (5, 2, 1)$. De plus, tous les motifs de $\phi(n, k-1)$ précèdent ceux de $\phi(n, k)$. $p = (6, 1, 1)$ précède tous les motifs de $\phi(8, 4)$. L'intérêt de cet ordre est qu'il permet d'établir une relation de dominance entre les motifs comme décrit dans [5].

Définition 1 Soit p et q deux motifs de $\phi(n)$, p domine q , noté $p \succeq q$, si et seulement $\forall t$ tel que $1 \leq t \leq \min\{|p|, |q|\}$, $\sum_{x=1}^t p[x] \geq \sum_{x=1}^t q[x]$.

Propriété 1 Soit G un graphe, p et q deux motifs, respectivement associés à deux colorations valides X et X' de G . Si $p \succeq q$, alors $\Sigma(X) \leq \Sigma(X')$.

Parmi l'ensemble des motifs de $\phi(n)$, certains d'entre eux, appelés *motifs majeurs*, possèdent des caractéristiques structurelles spécifiques, présentées dans la Propriété 2.

Propriété 2 Soit λ et β deux entiers tels que $\lceil \frac{n}{k} \rceil \leq \lambda \leq n - k + 1$ et $\beta = \lfloor \frac{n-k}{\lambda-1} \rfloor$. Un motif majeur de $\phi(n, k)$ est un motif p_k^i possédant les caractéristiques structurelles suivantes :

1. $p_k^i[x] = \lambda$, if $1 \leq x \leq \beta$;
2. $p_k^i[x] = n - \beta \times \lambda - (k - \beta - 1)$, if $x = \beta + 1$;
3. $p_k^i[x] = 1$, if $\beta + 1 < x \leq k$.

La structure spécifique des motifs majeurs nous a permis d'extraire un ensemble de propriétés permettant de démontrer qu'un motif majeur $p \in \phi(n, k)$ domine tout motif $p' \in \phi(n, k)$ lui succédant.

Propriété 3 Soit p et q deux motifs de $\phi(n, k)$ tels que p est un motif majeur. Si $p[1] = q[1]$, alors $p \succeq q$.

Preuve : Soit $\beta = \lfloor \frac{n-k}{p[1]-1} \rfloor$. Puisque p est majeur, nous avons $p[1] = p[2] = \dots = p[\beta] = q[1] \geq q[2] \geq \dots \geq q[\beta]$. Donc, $\forall t$ tel que $1 \leq t \leq \beta$, $\sum_{x=1}^t p[x] \geq \sum_{x=1}^t q[x]$.

De plus, $\forall t$ tel que $\beta + 1 \leq t < k$, nous avons $p[t+1] = p[t+2] = \dots = p[k] = 1 \leq q[k] \leq q[k-1] \leq \dots \leq q[t+1]$. Donc, $\sum_{x=1}^t p[x] = n - \sum_{x=t+1}^k p[x] \geq n - \sum_{x=t+1}^k q[x] = \sum_{x=1}^t q[x]$. Donc, $p \succeq q$. \square

Propriété 4 Soit p et q deux motifs majeurs de $\phi(n, k)$. Si $p[1] > q[1]$ alors $p \succeq q$.

La preuve de la propriété 4 est similaire à celle de la Propriété 3. Ainsi, ces deux propriétés nous permettent de conclure que si p_k^i est un motif majeur alors $\forall p_k^j \in \phi(n, k)$ tel que $j > i$, $p_k^i \succeq p_k^j$. La propriété suivante, étend la dominance des motifs majeurs dans $\phi(n)$.

Propriété 5 Soit k et k' deux entiers tels que $k < k'$. Si p_k^i est un motif majeur alors $\forall q \in \bigcup_{y=k'}^n \phi(n, y)$ tel que $q[1] \leq p_k^i[1]$, $p_k^i \succeq q$.

Preuve : Soit $\beta = \lfloor \frac{n-k}{p_k^i[1]-1} \rfloor$. Puisque p_k^i est majeur, nous avons $p_k^i[1] = p_k^i[2] = \dots = p_k^i[\beta] \geq q[1] \geq q[2] \geq \dots \geq q[\beta]$. Donc, $\forall t$ tel que $1 \leq t \leq \beta$, $\sum_{x=1}^t p_k^i[x] \geq \sum_{x=1}^t q[x]$.

De plus, $\forall t$ tel que $\beta + 1 \leq t < k$, nous avons $p_k^i[t+1] = p_k^i[t+2] = \dots = p_k^i[k] = 1 \leq q[k] \leq q[k-1] \leq \dots \leq q[t+1]$, q étant une séquence décroissante, cela implique que $\sum_{x=1}^t p_k^i[x] = n - \sum_{x=t+1}^k p_k^i[x] \geq n - \sum_{x=t+1}^k q[x] = \sum_{x=1}^t q[x]$. Donc, $p_k^i \succeq q$. \square

4 Nouvelles bornes pour MSCP

La construction des bornes $UBMs$ pour la force du graphe et $LBM\Sigma$ pour la somme chromatique est basée sur les motifs et la détermination du stable maximum du graphe. L'une des contraintes de notre approche repose donc sur le fait que la détermination du stable maximum est un problème lui-même $NP - difficile$. Cependant, le solver MaxCLIQ [7] nous a permis de le déterminer pour 52 instances de COLOR et DIMACS instantanément, et dans le pire des cas en moins de 38 minutes. De plus, dans le cas où $\alpha(G)$ est indéterminé, une borne supérieure peut être utilisée.

UBMs : Soit X une coloration valide de somme associée $\Sigma(X)$. Calculer $UBMs$ consiste à déterminer le plus petit nombre de couleurs k tel qu'il existe un motif majeur $p \in \phi(n, k)$, avec $p[1] = \alpha(G)$, et $\Sigma(X) < \Sigma(p)$. En effet, d'après la Propriété 5, il n'est pas nécessaire de considérer plus de k couleurs pour déterminer $\Sigma(G)$. Donc $UBMs = k - 1$. Un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n^2)$ permet de calculer $UBMs$ dans [5]. Les résultats expérimentaux ont démontré l'efficacité d' $UBMs$ face aux bornes connues de la littérature sur les benchmark COLOR [2] et DIMACS [3]. Sur 74 instances, $UBMs$ est meilleure dans 64 cas et donne un résultat similaire pour 4 instances.

LBMΣ : $LBM\Sigma$ est une borne inférieure algébrique pour la somme chromatique. La Propriété 5, montre que tout motif majeur p domine l'ensemble des motifs q qui lui succèdent dans $\phi(n)$ pour lesquels nous avons $q[1] \leq p[1]$. Donc, à partir d'une borne inférieure du nombre chromatique $\chi(G)$, que nous notons k , il s'agit de déterminer le motif majeur $p \in \phi(n, k)$ tel que $p[1] = \alpha(G)$ dont la somme associée est minimale. La borne $LBM\Sigma$ est la somme associée à p que nous pouvons définir comme suit :

$$LBM\Sigma = \alpha(G) \times \frac{\beta \times (\beta + 1)}{2} + (n - \beta \times \alpha(G) - (k - \beta - 1)) \times (\beta + 1) + \sum_{j=\beta+2}^k j \quad (1)$$

Les résultats expérimentaux sur les benchmark COLOR [2] et DIMACS [3], détaillés dans [6], ont permis d'améliorer la borne inférieure de $MSCP$ pour 27 instances et de fermer quatre instances flat1000-50-0, flat300-20-0, le450-5c et le450-5d.

Références

- [1] Amotz Bar-Noy, Mihir Bellare, Magnús M Halldórsson, Hadas Shachnai, and Tami Tamir. On chromatic sums and distributed resource allocation. *Information and Computation*, 140(2) :183–202, 1998.
- [2] Color02. <http://mat.gsia.cmu.edu/color/instances.html>.
- [3] Dimacs. <ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/graph/benchmarks/color>.
- [4] Ewa Kubicka and Allen J Schwenk. An introduction to chromatic sums. In *Proceedings of the 17th conference on ACM Annual Computer Science Conference*, pages 39–45. ACM, 1989.
- [5] Clément Lecat, Corinne Lucet, and Chu-Min Li. Sum coloring : New upper bounds for the chromatic strength. *arXiv :1609.02726*, 2016.
- [6] Clément Lecat, Corinne Lucet, and Chu-Min Li. New lower bound for the minimum sum coloring problem. In *The Association for the Advancement of Artificial Intelligence. AAAI*, 2017.
- [7] Chu-Min Li, Zhiwen Fang, and Ke Xu. Combining maxsat reasoning and incremental upper bound for the maximum clique problem. In *Tools with Artificial Intelligence (ICTAI), 2013 IEEE 25th International Conference on*, pages 939–946. IEEE, 2013.