Reformulation quadratique pour l'optimisation des flux de puissance

Hadrien Godard[123] Sourour Elloumi[23] Amélie Lambert[3] Jean Maeght[1]
Manuel Ruiz[1]

[1] Département Expertise Système, Réseau de Transport d'Électricité, Versailles, France
[2] ENSTA-UMA, Palaiseau, France
[3] CEDRIC-Cnam, Paris, France

Mots-clés : *Optimisation des flux de puissance, Reformulation quadratique, Programmation quadratique, Programmation semi-définie.*

Un réseau électrique est constitué d'un ensemble de nœuds reliés par des lignes. L'effet Joule rend non conservatif le transport de l'électricité des nœuds de production aux nœuds de consommation à travers les lignes. L'optimisation des flux de puissance, en anglais *Optimal Power Flow* (OPF), consiste à déterminer un état du réseau (tension et injections aux nœuds, transits sur les lignes) permettant de satisfaire la demande aux nœuds tout en minimisant un certain critére. Dans ce travail une nouvelle approche permettant de résoudre à l'optimum global l'OPF est introduite. Cette approche consiste à construire une reformulation quadratique [1] de l'OPF en utilisant une relaxation issue de l'état de l'art [4].

1 Formulation de l'OPF et relaxation semi-définie positive

L'OPF s'exprime comme un problème hermitien [5] dont les variables $v \in \mathbb{C}^n$ sont les tensions aux n nœuds du réseau électrique. Il est possible de plonger v dans $\mathbb{R}^{2n}$ en introduisant les variables réelles x tel que $x^t = [\frac{v^t+\bar{v}^t}{2}; \frac{v^t-\bar{v}^t}{2i}]$ qui représentent les parties réelles et imaginaires des tensions. L'OPF se modélise alors comme un programme quadratique non convexe en variables réelles, avec $\forall k \in \{0,\ldots,m\}, A_k \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$:

$$(OPF) \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^{2n}} \; f_0(x) = x^t A_0 x \\ s.t. \quad f_k(x) = x^t A_k x \leq a_k \qquad k = 1,\ldots,m \end{cases}$$

En introduisant la matrice variable $Y = xx^t$, (OPF) se reformule ainsi :

$$(RSDP) \begin{cases} \min\limits_{Y\in\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})} \langle A_0, Y\rangle \\ s.t. \quad \langle A_k, Y\rangle \leq a_k \qquad k = 1,\ldots,m \\ \quad Y \succeq 0, \quad rg(Y) = 1 \end{cases}$$

Une relaxation semi définie positive convexe $(\overline{RSDP})$, appelée relaxation du rang, s'obtient en éliminant la contrainte non convexe $rg(Y) = 1$.

2 Algorithme de résolution de l'OPF

Pour résoudre (OPF), nous en construisons dans un premier temps une reformulation quadratique à partir de la résolution de $(\overline{RSDP})$. Dans un second temps nous résolvons cette reformulation dans un algorithme de *branch-and-bound* ayant comme borne à la racine la valeur de $(\overline{RSDP})$ qui est de bonne qualité pour le problème de l'OPF [3].

Pour reformuler (OPF), nous intoduisons une matrice $S \succeq 0$ et la fonction suivante :

$$f_{0,S}(x,Y) = x^t S x + \langle A_0 - S, Y \rangle$$

Il est clair que si $Y = xx^t$, $f_{0,S}(x,Y)$ est égal à $f_0(x)$. En remplaçant dans (OPF), $f_0(x)$ par $f_{0,S}(x,Y)$, et $\forall k = 1,\dots,m$, $f_k(x)$ par $F_k(Y) = \langle A_k, Y \rangle$, et en ajoutant la contrainte $Y = xx^t$, nous obtenons la reformulation équivalente à (OPF), notée (OPF_S) :

$$(OPF_S) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^{2n}, Y \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})} f_{0,S}(x,Y) = x^t S x + \langle A_0 - S, Y \rangle & \\ s.t. \quad F_k(Y) = \langle A_k, Y \rangle \le a_k & k = 1,\dots,m \\ \quad Y = xx^t & \end{cases} \tag{1}$$

Pour résoudre (OPF_S) nous utilisons un algorithme de *branch-and-bound* où les bornes inférieures calculées en chaque nœud sont obtenues en relâchant les seules contraintes non convexes (1), et en ajoutant les inégalités de McCormick [6].

La borne obtenue au nœud racine dépend de la matrice S choisie pour construire la reformulation. Nous montrons qu'une matrice S^* issue de la solution optimale duale de $(\overline{RSDP})$ donne une reformulation (OPF_{S^*}) optimale, au sens où la borne inférieure au nœud racine est maximale. De plus, cette borne a même valeur que $(\overline{RSDP})$ ce qui nous permet de démarrer le branch-and-bound avec une borne inférieure de bonne qualité.

Finalement, nous proposons l'algorithme suivant pour la résolution de l'OPF :

Algorithm 1 Algorithme de résolution de l'OPF

1) Résolution de $(\overline{RSDP})$
2) Construction de (OPF_{S^*}) grâce à la solution optimale duale de $(\overline{RSDP})$
3) Résolution de (OPF_{S^*}) par un branch-and-bound

3 Conclusion

Nous proposons une nouvelle méthode de résolution exacte de l'OPF s'appuyant sur une reformulation quadratique obtenue à partir de la résolution de la relaxation du rang. L'algorithme résout des instances allant jusqu'à des tailles réalistes (1354 nœuds/1991 lignes). Nous présentons les résultats de notre algorithme sur ces instances, ainsi que ceux obtenus avec les solveurs `Couenne` [2] et `Baron` [7]. Ces résultats montrent l'aspect prometteur de notre approche.

Références

[1] Alain Billionnet, Sourour Elloumi and Amélie Lambert. *Exact quadratic convex reformulations of mixed-integer quadratically constrained problems.* Math. Programming, 158(1) :235-266, 2016.

[2] *Couenne : an exact solver for nonconvex MINLPs.* IBM and Carnegie Mellon University, 2006. `https://projects.coin-or.org/Couenne/`

[3] Cédric Josz, Stéphane Fliscounakis, Jean Maeght and Patrick Panciatici. *Ac power flow data in matpower and qcqp format : itesla, rte snapshots, and pegase.* arXiv, 2016.

[4] Javad Lavaei et Steven Low. *Zero duality gap in optimal power flow problem.* IEEE Transactions on Power Systems, 2012.

[5] Steven H. Low. *Convex relaxation of optimal power flow.* IEEE Transactions on Control of Network System, 1(1) :15-27, 2014.

[6] G.P. McCormick. *Computability of global solutions to factorable non-convex programs : Part I.* Math. Programming, 10(1) :147-175, 1976.

[7] Tawarmalani, M. et N. V. Sahinidis, *A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization.* Math. Programming, 103(2), 225-249, 2005.