Formulations PLNE et Branch & Cut pour le Min-up/Min-down Unit Commitment Problem

Pascale Bendotti[12], Pierre Fouilhoux[2], Cécile Rottner[12]

[1] EDF R&D, 7 boulevard Gaspard Monge, 91120 Palaiseau, France
{pascale.bendotti, cecile.rottner}@edf.fr

[2] UPMC, LIP6, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
{pierre.fouilhoux}@lip6.fr

Mots-clés : *UCP, PLNE, Polyèdre, Branch & Cut*

1 Introduction

Étant donné un horizon de temps discrétisé $\mathcal{T} = \{1, ..., T\}$, une demande D_t en puissance électrique doit être satisfaite à chaque pas de temps $t \in \mathcal{T}$. La puissance est fournie par un ensemble $\mathcal{N}$ de n unités de production. À chaque pas de temps, l'unité $i \in \mathcal{N}$ est soit à l'arrêt soit en marche, et dans ce dernier cas, sa production est comprise dans l'intervalle $[P^i_{min}, P^i_{max}]$. Chaque unité i doit satisfaire des contraintes de temps minimum de marche (resp. d'arrêt), *i.e.* chaque unité i doit rester en marche (resp. à l'arrêt) pendant au moins L^i (resp. ℓ^i) pas de temps après démarrage (resp. extinction). Chaque unité i a pour condition initiale (e^i, τ^i), c'est-à-dire que l'unité i est dans l'état e^i (en marche ou à l'arrêt) avant l'instant 1, et doit conserver le même état jusqu'à l'instant τ^i au moins (si $\tau^i = 0$, l'unité i est libre de démarrer ou de s'arrêter à l'instant 1). Chaque unité i induit trois types de coûts : un coût fixe de fonctionnement c^i_f, pour chaque instant où l'unité est en marche ; un côut de démarrage c^i_0, pour chaque instant où l'unité démarre ; et un coût c^i_p proportionnel à sa production. Le Min-up/min-down Unit Commitment Problem (MUCP) consiste à trouver un plan de production minimisant le coût total, tout en satisfaisant la demande et les contraintes de temps minimum de marche et d'arrêt.

Ce problème est la structure combinatoire du problème de planification de la production électrique, appelé Unit Commitment Problem (UCP), qui est résolu à un horizon journalier à EDF. Le MUCP est NP-difficile par réduction du problème de sac-à-dos.

Nous nous intéressons à la résolution du MUCP par des méthodes PLNE.

Pour cela, nous introduisons les variables suivantes :

— $x^i_t \in \{0, 1\}$, $\forall i \in \mathcal{N}$ $\forall t \in \mathcal{T}$, indiquant si l'unité i est en marche à l'instant t,

— $u^i_t \in \{0, 1\}$, $\forall i \in \mathcal{N}$ $\forall t \in \mathcal{T}$, indiquant si l'unité i démarre à l'instant t,

— $p^i_t \in \mathbb{R}$, la puissance produite par l'unité i à l'instant t.

Pour le cas particulier du MUCP avec une unique unité de production, plusieurs articles proposent une analyse polyédrale. Le MUCP est formulé dans [1] en utilisant uniquement les variables binaires x. Dans [2], les auteurs donnent une description complète du polytope à une unité dans l'espace des variables x. Dans le cas où des coûts de démarrage sont à prendre en compte, les variables x ne sont plus suffisantes à la formulation linéaire du problème. Ainsi, dans [3], Rajan et Takriti étudient le polytope à une unité dans l'espace des variables (x, u). Ils montrent que les inégalités suivantes, avec les inégalités triviales, décrivent complètement ce polytope :

$$
\begin{cases}
\sum_{t'=t-L+1}^{t} u_{t'} \leq x_t & \forall t \in \{L+1, ..., T\} \quad (1a) \\
\sum_{t'=t-\ell+1}^{t} u_{t'} \leq 1 - x_{t-\ell} & \forall t \in \{\ell+1, ..., T\} \quad (1b) \\
u_t \geq x_t - x_{t-1} & \forall t \in \{2, ..., T\} \quad (1c)
\end{cases}
$$

2 Comparaison de formulations

Nous nous intéressons à la formulation du MUCP à n unités avec contrainte de demande. Une première formulation possible est une formulation en variables (x, u) qui est la généralisation à n unités de la formulation proposée en [3].

Une autre possibilité est de formuler le problème à l'aide de variables de flot f sur n graphes définis comme suit. Pour chaque unité i, on introduit un graphe orienté G^i dans lequel un flot de valeur 1 et de coût c représente un plan possible de coût c pour l'unité i. Les variables de flot associées à G^i sont notées f^i. Une formulation PLNE basée sur les variables f^i, $i \in \mathcal{N}$, peut être obtenue en ajoutant les contraintes de demande. Cette formulation n'est malheureusement pas une formulation de flot, en raison du couplage induit par la demande.

On montre que les formulations en (x, u) et en f ont même relaxation linéaire.

À partir de ce résultat, nous choisissons de baser notre étude polyédrale sur la formulation en (x, u).

3 Branch & Cut

Nous étudions le polyèdre $P^n_{x,u}$ de la formulation en (x, u) à n unités. Nous caractérisons les cas dans lesquels les inégalités (1a), (1b), (1c) restent facettes de $P^n_{x,u}$. Nous définissons les inégalités *up-set*, vues comme une transposition au MUCP des *extended-cover* du polyèdre du sac-à-dos. Enfin, nous introduisons une nouvelle famille d'inégalités valides, nommées *interval up-set*, qui sont à la fois une généralisation des inégalités up-set, et une généralisation des inégalités turn-on (1a) définies par Rajan et Takriti.

Nous proposons des algorithmes de séparation pour les inégalités up-set, ainsi que pour les interval up-set. Nous élaborons enfin un algorithme efficace de Branch & Cut pour le MUCP, et présentons des résultats expérimentaux sur différentes classes d'instances.

Références

[1] S. Takriti, B. Krasenbrink et L. S.-Y. Wu. *Incorporating fuel constraints and electricity spot prices into the stochastic unit commitment problem.* Operations Research, 2000.

[2] J. Lee, J. Leung et F. Margot. *Min-up/min-down polytopes.* Discrete Optimization, 2004.

[3] D. Rajan et S. Takriti. *Minimum Up/Down Polytopes of the Unit Commitment Problem with Start-Up Costs.* IBM Research Report, 2005.