# Programmation linéaire en variables binaires pour le problème de la clique maximum équilibrée dans un graphe biparti

André Rossi[1], Yi Zhou[1], Jin-Kao Hao[1,2]

[1] LERIA, Université d'Angers, 2 Bd Lavoisier, F-49045 Angers, France
[2] Institut Universitaire de France, Paris, France
{andre.rossi,jin-kao.hao}@univ-angers.fr, zhou@info.univ-angers.fr

**Mots-clés** : *clique maximum, graphe biparti, programmation linéaire en variables binaires.*

## 1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, non orienté, dont l'ensemble des sommets est noté $V$, et l'ensemble des arêtes est noté $E$. Une clique $C \subseteq V$ de $G$ est un sous-ensemble de sommets tel que $G[C]$, le sous-graphe de $G$ induit par $C$, est complet (c'est-à-dire qu'il existe une arête entre toute paire de sommets de $G[C]$). Le problème de la clique maximum, consistant à déterminer une clique de $G$ de cardinalité maximale, est un problème $\mathcal{NP}$-complet [1]. Dans le cas particulier où $G$ est un graphe biparti, le problème de la clique maximum est de complexité polynomiale. On s'intéresse ici au problème de la clique maximum *équilibrée* dans un graphe biparti, que l'on note MBBP pour *Maximum Balanced Biclique Problem* : il s'agit de déterminer une clique $C$ de cardinalité maximale d'un graphe biparti $G = (U \cup V, E)$ sous la contrainte que le nombre de sommets de la clique est le même dans $U$ et dans $V$, où $U$ et $V$ désignent les deux partitions de l'ensemble des sommets de $G$. Plus formellement, MBBP consiste à déterminer $C \subseteq U \cup V$ de cardinalité maximale telle que $G[C]$ est un graphe biparti complet, sous la contrainte $|C \cap U| = |C \cap V|$. C'est cette dernière contrainte, appelée contrainte d'équilibre, qui rend MBBP $NP$-difficile [1]. Nous supposerons sans perte de généralité que $|U| = |V| = n$, car il est toujours possible d'ajouter des sommets isolés à l'une des partitions d'un graphe biparti pour satisfaire cette condition, sans affecter l'ensemble des cliques équilibrées. On notera $N(i)$ l'ensemble des sommets adjacents au sommet $i$. La figure 1 montre un graphe biparti et une clique équilibrée maximum.

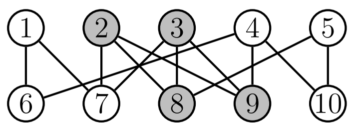


FIG. 1 – Un graphe biparti $G = (U, V, E)$ et une clique équilibrée maximum (en gris)

## 2 Formulation par PLNE de MBBP

MBBP a été formulé comme un programme linéaire en variables binaires dans [2], en exploitant le fait que toute clique de $G = (U \cup V, E)$ est un ensemble indépendant (un stable) de $\overline{G} = (U \cup V, \overline{E})$, le graphe complémentaire de $G$, où l'ensemble des arêtes de $\overline{G}$ est défini par $\overline{E} = \{(u, v) \in U \times V\} \setminus E$. Les $2n$ variables de décisions binaires de MBBP sont les suivantes : $x_i = 1$ si et seulement si le sommet $i$ appartient à la clique équilibrée $C$, pour tout $i$ dans

$U \cup V$. On suppose que $U = \{1, \dots, n\}$, et $V = \{n+1, \dots, 2n\}$. La formulation suivante sera appelée $F_{PLNE}$ :

$$\text{Maximiser} \sum_{u \in U} x_u$$

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \forall (u,v) \in \overline{E} \tag{1}$$

$$\sum_{u \in U} x_u = \sum_{v \in V} x_v \tag{2}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in U \cup V \tag{3}$$

La fonction objectif de MBBP maximise la demi-taille de la clique, la contrainte (1) assure que la solution est une clique (c'est-à-dire un stable de $\overline{G}$), la contrainte (2) garantit que la clique est équilibrée, et (3) impose l'intégrité des variables.

# 3 Résolution de MBBP

Les auteurs de [3] ont montré que MBBP était difficile à approximer avec un facteur d'approximation de $2^{\theta}$, où $\theta = \log(n)^{\delta}$, pour $\delta > 0$. L'adaptation de méthodes par séparation et évaluation initialement proposées pour le problème de la clique maximum produit de bons résultats, en particulier pour les graphes peu denses. La résolution de $F_{PLNE}$ à l'aide d'un solveur comme IBM CPLEX lorsque $n$ est supérieur à 100 conduit généralement à des temps de calcul très longs, en raison de la qualité de la borne supérieure, mais reste compétitive pour les graphes très denses, ce qui en fait une approche complémentaire aux méthodes par séparation et évaluation.

Nous proposons de renforcer $F_{PLNE}$ par l'ajout d'inégalités valides pour ce problème, en ciblant plus particulièrement l'amélioration de la borne supérieure. Pour cela, nous calculons $ub_i$, une borne supérieure sur la demi-taille de toute clique équilibrée contenant le sommet $i$, pour tout $i$ dans $U \cup V$, à l'aide d'un algorithme de propagation inspiré de [4]. Soit $\ell = \max_{i \in U \cup V}(ub_i)$. On désigne par $T_U$ (respectivement $T_V$) la collection de tous les sous-ensembles de sommets $i$ de $U$ (respectivement de $V$) tels que $ub_i < \ell$, et pour lesquels toute paire de sommet $(i,j)$ de $S \in T_U$ vérifie $N(i) \cap N(j) = \emptyset$. L'inégalité suivante, écrite ici pour $U$, est valide :

$$\sum_{i \in U : ub_i = \ell} x_i + \sum_{i \in S} (\ell - ub_i + 1) x_i \leq \ell \qquad \forall S \in T_U \tag{4}$$

On désigne par $F^+$ la formulation obtenue en ajoutant au plus $2(n - \ell)$ inégalités (4) à $F$. Les résultats obtenus montrent que la borne supérieure produite par la relaxation linéaire de $F^+$ peut être sensiblement meilleure que celle de $F$. Nous montrons également comment la formulation peut tirer parti d'une bonne solution réalisable, obtenue par exemple à l'aide d'une métaheuristique.

# Références


[1] M. S. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractibility : A Guide to NP-Completeness.* New York, NY, USA : Freeman & Co., 1979.

[2] M. Dawande, P. Keskinocak, J. Swaminathan, and S. Tayur. On biclique and multi-partite clique problems. *Journal of Algorithms*, 41(2) :388–403, 2001.

[3] U. Feige and S. Kogan. Hardness of approximation of the balanced complete bipartite subgraph problem. Dept. Comput. Sci. Appl. Math., Weizmann Inst. Sci., Rehovot, Israel, Tech. Rep. MCS04-04, 2004.

[4] M. Soto, A. Rossi, and M. Sevaux. Three new upper bounds on the chromatic number. *Discrete Applied Mathematics*, 159(18) :2281–2289, 2011.