Une approche tropicale de la programmation bi-niveau

Marianne Akian[1], Mustapha Bouhtou[2], Jean Bernard Eytard[1], Stéphane Gaubert[1]

[1] INRIA, CMAP, Ecole polytechnique, CNRS, 91128 Palaiseau, France

{marianne.akian,jean-bernard.eytard,stephane.gaubert}@inria.fr

[2] Orange Labs, 92320 Chatillon, France

{mustapha.bouhtou}@orange.com

Mots-clés : *programmation bi-niveau, géométrie tropicale, convexité discrète, tarification de réseaux*

1 Introduction

La programmation bi-niveau est un outil fondamental dans la résolution de problèmes issus de domaines variés (transport, énergie, télécommunications). Cependant, la plupart des problèmes bi-niveaux sont NP-durs. Nous proposons ici une approche de la programmation bi-niveau faisant intervenir la géométrie tropicale. Cette approche conduit à un algorithme polynomial pour une classe particulière de problèmes bi-niveau, en variables mixtes mais présentant une structure spécifique. Nous illustrons cela par un exemple d'application proposée par Orange visant à développer des incitations tarifaires pour équilibrer la charge dans un réseau sur une journée.

2 Une classe de problèmes bi-niveau

Nous étudions le problème bi-niveau suivant, qui est une version purifiée d'un problème d'équilibrage de charge de réseau télécom. Un opérateur souhaite influer sur la consommation de ses clients au moyen d'une incitation tarifaire, représentée par un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$: y_i représente un rabais consenti sur le prix de la consommation à l'instant i. Chaque client $a \in A$ de cet opérateur détermine alors sa consommation $u_a^* \in \mathbb{R}^n$ aux différents instants en résolvant un problème de bas niveau de la forme :

$$u_a^* \in \arg\max_{u_a \in \mathcal{E}_a} \langle \rho_a + y, u_a \rangle \ . \tag{1}$$

Ici, $\mathcal{E}_a$ désigne l'ensemble des points entiers d'un polytope $\mathcal{P}_a$, qui représente l'ensemble des consommations admissibles du client a, et $\rho_a \in \mathbb{R}^n$ représente l'utilité du client en l'absence d'incitation tarifaire. L'opérateur cherche alors à résoudre le problème de niveau haut :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} s(N), \qquad N = \sum_{a \in A} u_a^* \tag{2}$$

où u_a^* satisfait (1). Nous supposerons que le critère de l'opérateur s est convexe. Le cas où $s(N) = \sum_{1 \leq i \leq n} s_i(N(i))$ est séparable permet de modéliser des considérations d'équilibrage.

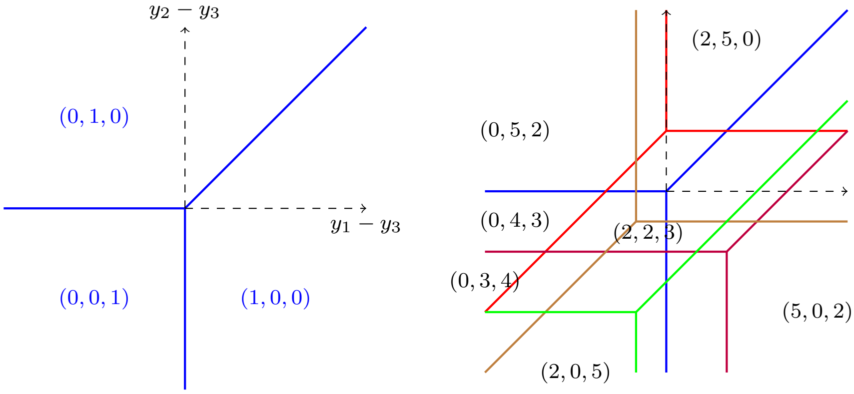
Le problème bas étant convexe, l'approche usuelle consiste à le remplacer par ses conditions de Kuhn et Tucker, ce qui ramène à un problème d'optimisation à un seul niveau, qui est difficile en raison de la présence de variables mixtes et de contraintes non convexes, voir [2].

Nous abordons ici le problème bas grâce à l'algèbre tropicale, qui a permis récemment de résoudre d'autres problèmes de nature économique [1]. Rappelons que le semi-corps max-plus ou tropical est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \max(a, b)$ et $a \odot b = a + b$. Résoudre un programme linéaire dont le critère dépend de manière affine d'un paramètre

$y \in \mathbb{R}^n$ revient précisément à évaluer en y un polynôme tropical multivarié. En particulier, la valeur du problème bas pour le client a peut s'écrire comme suit avec la notation tropicale :

$$P_a(y) = \max_{u_a \in \mathcal{E}_a} \langle \rho_a + y, u_a \rangle = \bigoplus_{u_a \in \mathcal{E}_a} (\rho_a(i) \odot y_1)^{u_a(1)} \dots (\rho_a(n) \odot y_n)^{u_a(n)}$$

L'*hypersurface tropicale* associée à un polynôme tropical est le lieu des points de non-différentiabilité de ce polynôme. Par exemple, l' hypersurface tropicale correspondant à $P(y) = \max(y_1, y_2, y_3)$ est représentée ci-après (figure de gauche) :



Un arrangement de cinq hypersurfaces tropicales est représenté sur la figure de droite. Un arrangement d'hypersurfaces tropicales coïncide avec l'hypersurface associée au polynôme produit :

$$\bigodot_{a \in A} P_a(y) = \sum_{a \in A} \max_{u_a \in \mathcal{E}_a} \langle \rho_a + y, u_a \rangle = \max_{N \in \sum_{a \in A} \mathcal{E}_a} [\langle y, N \rangle + \psi(N)] \tag{3}$$

où $\psi(N) = \max\{\sum_{a \in A} \langle \rho_a, u_a \rangle \mid u_1 \in \mathcal{E}_1, ..., u_A \in \mathcal{E}_A, \sum_{a \in A} u_a = N\}$. On démontre que les cellules d'un tel arrangement déterminent les consommations *réalisables* des clients, c'est-à-dire, les vecteurs N pour lesquels il existe $y \in \mathbb{R}^n$ et des vecteurs $u_a^* \in \mathcal{E}_a$ vérifiant $N = \sum_{a \in A} u_a^*$ et la contrainte de niveau bas (1). Quelques vecteurs de consommation réalisables, sur une journée de 3 pas de temps, sont donnés sur la figure. Comme le critère du problème haut du problème bi-niveau considéré ne dépend pas explicitement de y, on parvient au résultat suivant.

Théorème (Décomposition)**.** *Une solution y^* du problème bi-niveau peut-être obtenue en :*
- *calculant $N^* \in \arg\min_{N \in \mathcal{R}} s(N)$, où $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des vecteurs N réalisables ;*
- *trouvant ensuite $y^* \in \mathbb{R}^n$ et pour chaque $a \in A$, $u_a^* \in \mathcal{E}_a$, vérifiant :*

$$N^* = \sum_{a \in A} u_a^* \quad \textit{et} \quad \langle \rho_a + y, u_a^* \rangle = \max_{u_a \in \mathcal{E}_a} \langle \rho_a + y, u_a \rangle \textit{ pour tout } a \in A \ .$$

La seconde étape revient à trouver un point dans un polyèdre, ce qui peut se faire en temps polynomial. La difficulté est ainsi ramenée à la première étape. Nous démontrons que lorsque chaque polytope $\mathcal{P}_a$ est un *hypersimplexe*, ce qui signifie que $\mathcal{P}_a = \{u_a \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n u_a(i) = R_a\}$ avec R_a entier, on a les propriétés suivantes : (i) $\mathcal{R} = \sum_{a \in A} \mathcal{E}_a$, (ii) $\mathcal{R}$ est un ensemble *M-convexe discret*, au sens de Murota [3], ce qui amène à un algorithme polynomial.

Nous illustrons finalement cette approche par un problème simplifié d'équilibrage de charge de consommation des données sur un réseau mobile.

Références

[1] Elizabeth Baldwin and Paul Klemperer. Tropical geometry to analyse demand. Technical report, Working paper, Oxford University, 2012.

[2] Benoît Colson, Patrice Marcotte, and Gilles Savard. An overview of bilevel optimization. *Annals of operations research*, 153(1) :235–256, 2007.

[3] Kazuo Murota. *Discrete convex analysis*. SIAM, 2003.