

Analyse polyédrale du sous graphe d'intervalle sans clique de taille $m + 1$

Mohammed-Albarra HASSAN^{1,2} Imed KACEM¹ Sébastien MARTIN¹
Izzeldin M.OSMAN³

¹ Université de Lorraine, LCOMS EA 7306, Metz 57000, France,

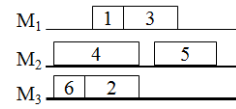
² University of Gezira, Wadmedani, Sudan,

³ Sudan University of Science and Technology, Khartoum, Sudan

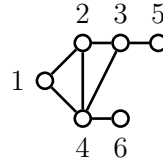
Mots-clés : *approche polyédrale, graphe d'intervalle, clique*

1 Introduction

Dans le cadre des problèmes d'ordonnancement d'un ensemble J de n tâches sur m machines, les graphes d'intervalle permettent de représenter les interactions entre les différentes tâches exécutées sur plusieurs machines. Considérons un ordonnancement des tâches sur les m machines. Le graphe induit associé est défini par $G = (J, E)$ où il existe une arête entre $j_1, j_2 \in J$ si et seulement si les deux tâches s'exécutent en même temps.



(a) Un ordonnancement valide



(b) Le sous-graphe associé

La figure 1a montre un ordonnancement valide et la figure 1b montre le sous graphe induit associé.

Pour qu'un ordonnancement soit réalisable, il est nécessaire que le graphe induit soit un graphe d'intervalle et qu'il ne contienne pas de clique de taille supérieure ou égale à $m+1$.

Nous nous intéressons donc au problème consistant à déterminer si un graphe est d'intervalle et sans clique de taille $m + 1$.

2 Polytope du sous-graphe d'intervalle sans clique de taille $m + 1$

Soit $\mathcal{I} := \{I \subseteq E \mid G[I]\}$ l'ensemble des ensembles d'arêtes induisant un graphe d'intervalle sans clique de taille $m+1$. Le vecteur z^I est appelé vecteur d'incidence associé à I . Nous définissons le polytope associé à ce problème de la manière suivante :

$$P_{\mathcal{I}}(G, m) := \text{conv}\{z^I \in \{0, 1\}^{|E|} \mid I \in \mathcal{I}\},$$

Proposition 1 *Polytope $P_{\mathcal{I}}(G, m)$ est de pleine dimension.*

La figure 2 montre les sous-graphes interdits assurant qu'un graphe est d'intervalle (cf. [1]).

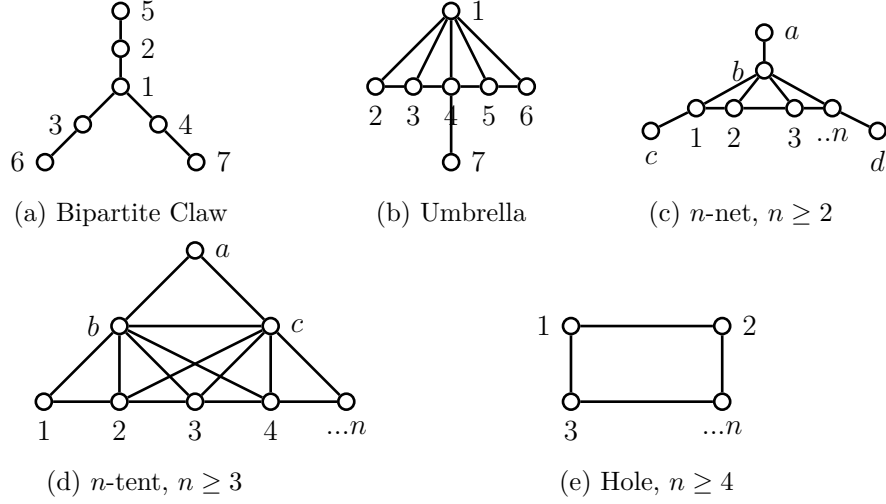


FIG. 2 – Sous-graphes interdits

Nous avons proposé des inégalités permettant de supprimer ces sous-graphes interdits. Pour chacune de ces inégalités nous analysons leur aspect facial. Par exemple, pour le sous-graphe Bipartite Claw nous définissons les sous-ensembles suivants :

- $BC = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (4, 7), (3, 6)\}$.
- $\overline{BC}_h^A = \{(3, 5), (2, 6), (5, 4), (2, 7), (3, 7), (4, 6)\}$.
- $\overline{BC}_\Delta = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$,
- $\overline{BC}_i = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7)\}$.

Si $m = 2$ alors la contrainte suivante est valide et définit une facette pour $P_{\mathcal{I}}(G, m)$.

$$\sum_{e \in BC} z_e \leq 5. \quad (1)$$

Par contre, si $m \geq 3$ alors la contrainte suivante est valide et définit une facette pour $P_{\mathcal{I}}(G, m)$.

$$\sum_{e \in BC} 2z_e - \sum_{e \in \overline{BC}_h^A \cup \overline{BC}_\Delta} z_e - 2 \sum_{e \in \overline{BC}_i} z_e \leq 10 \quad (2)$$

Pour chacune de ces contraintes nous proposons plusieurs séparations, exactes et heuristiques. Nous finissons par comparer les performances de chaque contrainte sur le problème d'ordonnement sur plusieurs machines avec contraintes disjonctives.

Références

- [1] Lekkeikerker, C., & Boland, J. : Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, 51(1), 45-64 (1962).
- [2] M. Hassan, I. Kacem, S. Martin and I. M. Osman. "Unrelated Parallel Machine Scheduling Problem With precedence Constraints : Polyhedral Analysis and Branch-and-Cut". *Proceedings ISCO 2016*