Generalized Additive Games

Giulia Cesari[1,2], Roberto Lucchetti[2], Stefano Moretti[1]

[1] Université Paris-Dauphine, Paris, France

[2] Politecnico di Milano, Milano, Italy

{giulia.cesari}@polimi.it

Mots-clés : *cooperative game theory, solutions for TU-games, operation research games, peer games, argumentation games.*

1 Introduction

Le papier traite de l'analyse théorique d'une nouvelle famille de jeux coopératifs, où la valeur de chaque coalition peut être calculée à partir des contributions des joueurs par un opérateur additif qui décrit comme les capacités individuelles interagissent au sein de groupes.

Un jeu coalitionnel, traditionnellement appelé jeu coopératif avec utilité transférable, est défini par une paire (N, v), où N dénote un ensemble fini des joueurs et $v : 2^N \to \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique, qui associe à chaque *coalition* $S \subseteq N$ de joueurs une valeur réelle $v(S)$, qui représente le total des profits de la coalition des joueurs quand ils coopérent, quoi que fassent les joueurs restants.

Un jeu coalitionnel avec n joueurs est ainsi caractérisé par un vecteur de $2^n - 1$ réels, i.e. une valeur pour chaque sous-ensemble non vide des joueurs, ce qui devient difficile à traiter quand n est grand. Puisque le nombre de coalitions croit exponentiellement avec le nombre de joueurs, il est très intéressant, pour des raisons de calcul, de sélectionner des classes de jeux qui peuvent être décrites d'une façon concise. Par conséquent, de nombreux modèles dans la littérature sur les jeux coopératifs se concentrent sur des situations d'interaction caractérisées par une représentation compacte d'un jeu coalitionnel, de manière que la valeur de chaque coalition puisse être facilement calculée. Une représentation compacte permet non seulement de réduire la complexité de description d'un jeu et le calcul des solutions mais aussi de réunir de nombreux problèmes réels sous un formalisme unifié.
De nombreuses classes de jeux qui décrivent d'une façon compacte le synergisme entre joueurs se trouvent dans la littérature, entre autres : *profit sharing games*, *cost allocation games*, *market games*, *optimization games* (*spanning tree games, flow games and linear programming games*) et *voting games.*

En particulier, il existe de nombreuses approches pour la définition des classes de jeux dont la représentation concise est dérivée d'un système additif entre coalitions. Dans certains contextes, en raison d'une structure sous-jacente entre les joueurs, telle qu'un réseau, un ordre, ou une structure de permission, la valeur d'une coalition $S \subseteq N$ peut être dérivée additivement à partir d'une collection des sous-coalitions $\{T_1, \cdots T_k\}$, $T_i \subseteq S$ $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$. De telles situations sont modélisées, par exemple, par les *graph-restricted games*, introduits par Myerson dans [14] et étudiés davantage par Owen dans [15] ; les *component additive games* et les *restricted component additive games* [9].

Parfois, la valeur de chaque coalition est calculée, à partir des valeurs que les joueurs peuvent s'assurer individuellement, par un mécanisme qui décrit les interactions entre les individus au sein d'un groupe de joueurs. Par exemple, on peut considérer un jeu des coûts où n joueurs veulent acheter en ligne n objets différents et la valeur d'un joueur dans le jeu est définie comme le prix de l'objet qu'il achète. Cependant, un tel modèle peut échouer à souligner l'importance d'un sous-ensemble des joueurs à contribuer à la valeur d'une coalition dont il fait partie. Dans l'exemple précédent, il arrive souvent qu'en faisant un achat collectif, quand un certain prix limite est atteint, des objets soient offerts et donc le prix qu'une coalition S doit payer dépendra seulement du prix d'un sous-ensemble des objets achetés.

En effet, dans certains cas la procédure utilisée pour estimer la valeur d'une coalition $S \subseteq N$ est fortement liée à la somme des valeurs individuelles dans un autre sous-ensemble $T \subseteq N$, non nécessairement inclus dans S.

De nombreux exemples dans la littérature rentrent dans cette catégorie, en particulier certaines classes de *graph games*, entre eux les *airport games* [11, 12], le *connectivity game* et ses extensions [1], les *argumentation games* [4] et certaines classes de *operation research games* comme les *peer games* [5], ou les *mountain situations* [13].

Dans les *graph games* mentionnées ci-dessus, un graphe (ou réseau) (N, E) décrit les interactions entre joueurs : les nœuds (ou sommets) du réseau sont les joueurs dans N et il existe une arête (ou lien) $e = \{i, j\} \in E$ entre deux nœuds i et j si les joueurs correspondants sont capables d'interagir directement.
Le réseau modélise les restrictions de possibilité d'interaction entre joueurs et établit la façon dont les compétences individuelles interagissent dans des groupes de joueurs. En d'autres termes, dans plusieurs cas, la structure de réseau détermine quels joueurs doivent contribuer à la valeur (ou coût) des coalitions, en assemblant leurs valeurs individuelles.

Dans tous les modèles mentionnés ci-dessus, la valeur d'une coalition S de joueurs est calculée comme la somme des valeurs individuelles des joueurs dans un sous-ensemble de S. D'un autre côté, dans certains cas la valeur d'une coalition peut être affectée par des influences extérieures et des joueurs en dehors de la coalition peuvent contribuer, soit d'une façon positive soit négative, à la valeur de la coalition même. C'est le cas, par exemple, des *bankruptcy games* [2] et des *maintenance cost games* [10].

Dans ce papier [8], qui a été accepté pour la publication dans *International Journal of Game Theory*, on introduit une nouvelle classe de jeux cooperatifs, les *Generalized Additive Games* (*GAGs*), où la valeur d'une coalition $S \subseteq N$ est evaluée par un filtre d'interaction, c'est-à-dire une fonction $\mathcal{M}$ qui élit les joueurs qui contribuent à la valeur de la coalition S.
L'objectif de ce modèle est de fournir un cadre général pour décrire de nombreuseus classes des jeux étudiées dans la littérature sur les jeux coalitionnels, et en particulier sur les graph games, et de fournir une sorte de taxonomie des jeux coalitionnels qui sont attribuables à cette notion d'additivité sur les valeurs individuelles.

La définition générale de la fonction $\mathcal{M}$ permet d'embrasser diverses classes de jeux, comme par exemple les *simple games*. De plus, en faisant plus d'hypothèse sur $\mathcal{M}$, notre approche permet de classifier des jeux existants sur la base des propriétés de $\mathcal{M}$.
En particulier, on définit la classe de *basic GAGs*, qui est caractérisée par le fait que les joueurs qui contribuent à une coalition S sont sélectionnés sur la base de la présence, parmi les joueurs dans S, de leurs *amis* et *ennemis*, c'est-à-dire que un joueur contribue à la valeur de S si et seulement si S contient au moins un des ses amis et aucun des ses ennemis.
Plusieurs classes de jeux susmentionnées peuvent être décrites comme basic GAGs, ainsi que des jeux qui dérivent de situations réelles. Par exemple, ce modéle, se révèle approprié pour représenter un réseau social en ligne, dont les amis et ennemis des utilisateurs du web sont déterminés par leurs profils sociaux.
L'intérêt de cette classification n'est pas seulement taxonomique, puisqu'elle permet aussi d'étudier les propriétés des solutions des classes de jeux connus dans la littérature et elle fournit des outils potentiellement efficaces pour calculer des solutions de nouvelles classes de jeux qui peuvent être décrites dans ce cadre formel. En particulier, il est possible de déduire, pour la classe de basic GAGs, des résultats concernant d'importants concepts de solutions, comme le *core* et les *semivalues*.

2 Modèle et résultats théoriques

On appelle *Generalized Additive Situation* (GAS) un triplet $\langle N, v, \mathcal{M} \rangle$, où N est l'ensemble des joueurs, $v : N \to \mathbb{R}$ est une fonction qui associe à chaque joueur une valeur réelle et

$\mathcal{M} : 2^N \to 2^N$ est une *fonction de coalition* , qui associe une coalition (qui peut être vide) $\mathcal{M}(S)$ à chaque coalition $S \subseteq N$ des joueurs et telle que $\mathcal{M}(\emptyset) = \emptyset$.

Étant donné le GAS $\langle N, v, \mathcal{M}\rangle$, le *Generalized Additive Game* (GAG) associé est défini comme le jeu coalitionnel $(N, v^{\mathcal{M}})$ qui associe à chaque coalition la valeur

$$v^{\mathcal{M}}(S) = \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{M}(S)} v(i) & \text{si } \mathcal{M}(S) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

La définition générale de la fonction $\mathcal{M}$ permet d'embrasser diverses classes de jeux, comme par exemple les *simple games*. Soit w un jeu simple. w peut être décrit par le GAG associé à $\langle N, v, \mathcal{M}\rangle$ où $v(i) = 1$ pour tous i et

$$\mathcal{M}(S) = \begin{cases} \{i\} \subseteq S & \text{si } S \in \mathcal{W} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathcal{W}$ est l'ensemble des coalitions gagnantes dans w.
De plus, en faisant plus d'hypothèse sur $\mathcal{M}$, notre approche permet de classifier des jeux existants sur la base des propriétés de $\mathcal{M}$. En particulier, on introduitla classe de *basic GAGs*. Soit $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i \in N}$ une collection, dont $\mathcal{C}_i = \{F_i^1, \ldots, F_i^{m_i}, E_i\}$ est une collection de sous-ensembles de N telle que $F_i^j \cap E_i = \emptyset$ pour tous $i \in N$ et pour tous $j = 1, \cdots, m_i$. On note $\langle N, v, \mathcal{C}\rangle$ le *basic* GAS associé à la fonction de coalition $\mathcal{M}$ définie par :

$$\mathcal{M}(S) = \{i \in N : S \cap F_i^1 \neq \emptyset, \ldots, S \cap F_i^{m_i} \neq \emptyset, S \cap E_i = \emptyset\} \tag{2}$$

et par $\langle N, v^{\mathcal{C}}\rangle$ le GAG associé, qu'on appelle *basic* GAG.

Pour simplifier, on peut supposer sans perte de généralité que $m_1 = m_2 = \cdots = m_n := m$. On appelle chaque F_i^k, pour tous $i \in N$ et tous $k = 1, \ldots, m$, le k-ème (k-th) ensemble des *amis* de i, et E_i l'ensemble des *ennemis* de i. Un cas particulièrement simple est celui où chaque joueur a un seul ensemble d'amis, qu'on note par F_i.

Exemple (airport games) [11, 12] : Soit N l'ensemble des joueurs. On divise N en groupes $N_1, N_2, \ldots,\ N_k$ tels que á chaque N_j, $j = 1, \ldots, k$, est associé un nombre réel positif c_j avec $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k$, qui représentent des coûts. Soit w le jeu dont la valeur d'une coalition S est définie par $w(S) = \max\{c_i : N_i \cap S \neq \emptyset\}$. Tel jeu (et ses variantes) peut être décrit par un basic GAS $\langle N, (\mathcal{C}_i = \{F_i, E_i\})_{i \in N}, v\rangle$ dont pour chaque $i \in N_j$ et chaque $j = 1, \ldots, k$:

- $v(i) = \frac{c_j}{|N_j|}$,
- $F_i = N_j$,

et $E_i = N_{j+1} \cup \ldots \cup N_k$ pour chaque $i \in N_j$ et chaque $j = 1, \ldots, k-1$ et $E_l = \emptyset$ pour chaque $l \in N_k$.

Par des arguments similaires, il est possible de montrer que toutes les classes de jeux sus-mentionnées peuvent être décrites comme basic GAGs, ainsi que des jeux qui dérivent de situations réelles. L'intérêt de cette classification n'est pas seulement taxonomique, puisqu'elle permet aussi d'étudier les propriétés des solutions des classes de jeux connus dans la littérature et elle fournit des outils potentiellement efficaces pour calculer des solutions de nouvelles classes de jeux qui peuvent être décrites dans ce cadre formel.

Dans ce papier, on fournit quelques résultats sur des concepts des solutions classiques pour les basic GAGs, et on s'intéresse au problème de garantir le fait que le cœur d'un basic GAG soit non vide. En particulier, on fournit des conditions suffisantes pour que le cœur soit non vide et des formules concises pour les semivalues (en particulier pour la valeur de Shaley [16] et l'index de Banzhaf [3]) pour basic GAGs où chaque joueur a un seul ensemble d'amis, ou deux ensembles, dont un est le singleton $F_i^k = \{i\}$, ainsi qu'une formule pour les semivalues où chaque joueur a plusieurs ensembles d'amis.

3 Conclusions

Deux applications de notre modèle, qui concernent deux domaines de recherche très différents, comme la théorie de l'argumentation et la biomédecine, sont décrites dans [6] et [7] et indiquent que notre modèle représente un important et flexible outil pour l'analyse d'une variété des situations et problèmes réels, aussi grâce au fait que pour certaines sous-classes il est possible d'étudier d'une façon simple et efficace les solutions correspondantes.
De plus, puisque en general, pour un basic GAGs avec un ensemble des ennemis non vide, il est improbable que la grande coalition se forme, une interessante direction pour la recherce future est l'analyse des problèmes strategiques liés à la formation de coalitions.

Références

[1] Amer, R., Giménez, J. M. A connectivity game for graphs. *Mathematical Methods of Operations Research*, 60(3) :453–470, 2004.

[2] Aumann, R. J., Maschler, M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the talmud. *Journal of Economic Theory*, 36(2) :195–213, 1985.

[3] Banzhaf III, J. F. Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis. *Rutgers L. Rev*, 19 :317, 1964.

[4] Bonzon, E., Maudet N., Moretti S. Coalitional games for abstract argumentation. *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Models of Argument*, pages 161–172, 2014.

[5] Brânzei, R., Fragnelli, V., Tijs, S. Tree-connected peer group situations and peer group games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 55(1) :93–106, 2002.

[6] Cesari G., Algaba E., Moretti S., Nepomuceno J.A. A game theoretic neighbourhood-based relevance index to evaluate nodes in gene co-expression networks. *Submitted to : Computer Methods and Programs in Biomedicine.*

[7] Cesari G., Fossati F., Moretti S. A conflict index for arguments in an argumentation graph. *Accepted at the European Conference on Argumentation ECA2017.*

[8] Cesari G., Lucchetti R., Moretti S. Generalized additive games. *International Journal of Game Theory*, 2016.

[9] Curiel, I., Hamers, H., Tijs, S., Potters, J. Restricted component additive games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 45(2) :213–220, 1997.

[10] Koster, M. Cost sharing in production situations and network exploitation. *Tilburg University, School of Economics and Management*, 1999.

[11] Littlechild, S.C., Owen, G. A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science*, 20 :370–372, 1973.

[12] Littlechild, S.C., Thompson, G.F. . Aircraft landing fees : a game theory approach. *Bell Journal of Economics*, 8 :186–204, 1977.

[13] Moretti, S., Norde, H., Do, K.H.P., Tijs, S. Connection problems in mountains and monotonic allocation schemes. *TOP*, 10(1) :83–99, 2002.

[14] Myerson, R.B. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of operations research*, 2(3) :225–229, 1977.

[15] Owen, G. Values of graph-restricted games. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(2) :210–220, 1986.

[16] Shapley, L.S. . A value for n-person games. *In Kuhn,H.W. and Tucker,A.W. (eds) Contributions to the Theory of Games II. Annals of Mathematics Studies*, 28 :307–317, 1953.