Dimensionnement des réseaux gravitaires de distribution d'eau potable par relaxation convexe et décomposition spatiale

Gratien Bonvin[1], Sophie Demassey[1]

CMA, Mines ParisTech, PSL Research University, BP 207, F-06902 Sophia Antipolis, France
{gratien.bonvin,sophie.demassey}@mines-paristech.fr

Mots-clés : *Dimensionnement de réseaux, programmation non-linéaire en nombres entiers, relaxation convexe, décomposition*

1 Dimensionnement d'un réseau d'eau

Le dimensionnement d'un réseau gravitaire de distribution d'eau consiste à choisir, pour chaque tronçon du réseau dont la topologie est donnée, le diamètre de la canalisation permettant d'acheminer la demande de pointe aux consommateurs finaux avec une pression adéquate tout en minimisant le coût total d'investissement [3]. Les sources d'eau sont à une altitude plus élevée que les points de consommation, ce qui évite l'utilisation de pompes.

Les contraintes liant le débit et les pertes de charge dans les canalisations sont non-convexes et les décisions de dimensionnement discrètes. Bragalli et al. [2] montrent qu'une approche par programmation non-linéaire en nombres entiers est supérieure en pratique à la méthode classique d'approximation des contraintes de pertes de charge par des fonctions linéaires par morceaux. Plus récemment, Raghunathan [4] se ramène à un modèle convexe après duplication des variables de décision par dimension et sens et par approximation. Notre approche, que nous avons initiée dans le cadre de la résolution du problème opérationnel de planification du pompage dans les réseaux de distribution d'eau potable [1], repose aussi sur une relaxation convexe des contraintes de pertes de charge mais procède d'une augmentation plus limitée du modèle. Nous proposons également une méthode de décomposition spatiale du réseau pour traiter les instances pratiques larges de la littérature.

Soit N l'ensemble des jonctions (dont un ensemble de sources S et les noeuds en charge $N \backslash S$) et E l'ensemble des segments. Pour chaque segment $e \in E$, il faut choisir le diamètre de la canalisation à installer parmi un ensemble $D_e \subset \mathbb{R}_+$, auquel on associe un coût $C_e : D_e \to \mathbb{R}_+$. La vitesse maximale dans la canalisation est bornée par v_e. Pour chaque noeud en charge $i \in N \backslash S$, présentant une demande en volume Q_i, la charge doit être comprise entre une valeur minimale $H_i^{\min}$, qui garantit une pression minimale au robinet, et une valeur maximale $H_i^{\max}$, qui prévient des pressions trop fortes favorisant les fuites.

Le problème est formulé à l'aide de variables binaires $x_{e,d}$ valant 1 si une canalisation de diamètre $d \in D_e$ est installée sur le segment $e \in E$ et de variables continues q_e, le débit s'écoulant dans le segment $e \in E$, et h_i, la charge au noeud $i \in N$.

Outre l'aspect discret, la complexité du problème provient des contraintes non-convexes

$$h_i - h_j = \frac{10.7 l_e}{k_e^{1.852}} \left(\sum_{d \in D_e} x_{e,d} d^{4.87} \right)^{-1} sgn(q_e) \mid q_e \mid^{1.852} \tag{1}$$

qui lient la perte de charge au débit s'écoulant dans une canalisation $e = (i, j) \in E$, avec l_e sa longueur et k_e le coefficient de rugosité.

2 Relaxation convexe et décomposition spatiale

Minimiser le coût d'investissement implique de choisir les diamètres les plus petits, de limiter les pertes de charge et d'adopter des débits proches de leur vitesse maximale. De sorte, l'équation (1), si on la relaxe à son enveloppe convexe, tend à être satisfaite. Notre proposition est basée sur cette observation : en remplaçant les contraintes de pertes de charge par leur enveloppe convexe, on abaisse notablement la complexité du modèle, tout en augmentant faiblement l'espace des solutions autour de l'optimum.

Par ailleurs, dans le cas d'un réseau comprenant plusieurs (quelques) sources, la majorité des nœuds sont approvisionnés à partir d'une unique source, celle la plus proche, afin de limiter encore une fois les pertes de charges qui sont proportionnelles à la longueur des canalisations. En nous basant sur cette observation, nous proposons de partitionner le réseau en $|S|$ sous-réseaux contenant chacun une source et l'ensemble des nœuds en charge les plus proches. La relaxation convexe est alors résolue de manière indépendante sur chaque sous-réseau et une solution globale est recomposée de manière heuristique à partir des $|S|$ solutions relâchées.

Nous avons expérimenté l'approche sur des instances de la littérature et comparé nos résultats à [2] et [4]. Le schéma de résolution est le suivant : on alloue un temps maximal de 5 minutes au branch-and-bound de Gurobi pour la résolution de la relaxation convexe sur chaque sous-réseau. Une solution réalisable globale est calculée à partir des solutions trouvées à l'aide de l'heuristique de recomposition et améliorée par recherche locale. Dans notre étude préliminaire, nous appliquons enfin le schéma de reconstruction d'une solution réalisable proposé dans [4]. Le temps total de résolution est limité à 2 heures.

Instance	Notre approche	Bragalli et al. [2]	Raghunathan [4]
Foss. P0	**70,680,507**	**70,680,507**	71,741,922
Foss. Ir.	**178,494**	**178,494**	**178,494**
Foss. P1	**28,853**	29,117	31,352
Pescara	**1,804,452**	1,820,263	1,814,271
Modena	**2,569,401**	2,576,589	4,191,455

Le tableau ci-dessus présente les résultats sur 5 instances où les meilleures solutions connues ne sont pas prouvées optimales. Pour l'instance *Fossolo_Poly_0*, l'approche proposée permet d'obtenir la solution optimale en 20 minutes. Pour 3 autres instances (*Fossolo_Poly_1, Pescara, Modena*), nous améliorons la meilleure solution connue.

L'instance *Pescara* illustre tout particulièrement l'intérêt de la décomposition spatiale. En effet, après avoir calculé séparément la solution optimale du problème relâché pour les 3 sous-réseaux en moins de 3 minutes, la solution reconstruite à l'aide de l'heuristique (1,812,964) est meilleure que les solutions de [2] et [4] calculées en 2 heures.

Références

[1] Bonvin G, Demassey S, Le Pape C, Maïzi N, Mazauric V, Samperio A (2016) A convex mathematical program for pump scheduling in a class of branched water networks. Appl Energy. doi :10.1016/j.apenergy.2015.12.090

[2] Bragalli, C., D'Ambrosio, C., Lee, J., Lodi, A., and Toth, P. (2012). On the optimal design of water distribution networks : A practical MINLP approach. Optimization and Engineering, 13, 219-246.

[3] D'Ambrosio C, Lodi A, Wiese S, Bragalli C. Mathematical programming techniques in water network optimization. Eur J Oper Res 2015 :243(3) :774-88

[4] Raghunathan, A. U. (2013). Global optimization of nonlinear network design. SIAM Journal on Optimization, 23(1), 268-295