# Programmation non convexe et non linéaire en variables mixtes : une application dans le domaine de l'éfficacité énergétique dans les réseaux de téléphonie mobile

Dominique Quadri[1], Eric Soutil[2], Steven Martin[1]

[1] Université Paris-Sud (Paris Saclay), LRI, Campus d'Orsay, 91405 Orsay, France
{quadri, steven.martin}@lri.fr
[2] CNAM Paris, CEDRIC, 292 rue Saint Martin - 75003 Paris, France
{eric.soutil}@cnam.fr

**Mots-clés** : *programmation non linéaire, non convexe, variables mixtes, application dans les réseaux.*

## 1 Introduction

Ces dix dernières années, de nombreuses recherches ont été menées concernant l'Efficacité Spectrale (ES) (en anglais *Spectral Efficiency* (SE)), et ce pour fournir une meilleure qualité de service face à une demande toujours plus importante. En parallèle, par souci des coûts engendrés par l'utilisation de l'énergie mais aussi par la prise en compte de considérations environnementales, l'Efficacité Energétique (EE) (en anglais *Energy Efficiency* (EE)) a retenu l'attention des chercheurs dans le domaine des réseaux sans fil. Malheureusement, ces deux objectifs sont contradictoires en terme d'optimisation. En effet, l'amélioration de (ES) implique une augmentation de la consommation de l'énergie [2]. Ce travail est axé sur l'optimisation de l'Efficacité Energétique (EE). En générale, celle-ci est définie comme le rapport du débit consommé par un utilisateur et de la puissance globale du réseau. Le problème d'optimisation s'y rapportant possède un unique optimum global [4]. Isheden *et al.* [3] proposent de formuler le problème de maximisation de l'Efficacité Energétique (EE) comme un programme fractionnaire (PF) [1]. Nous sommes donc partis de cette formulation pour traiter le problème d'allocation de ressources et de maximisation de l'Efficacité Energétique (EE) dans un réseau hétérogène. Le modèle initial est alors un programme fractionnaire non concave en variables mixtes ($MINLFP$). Ce problème est NP-difficile et un défi quant à sa résolution pratique, du fait de difficultés additionnées : la fonction objectif fractionnaire, non concave, comprenant des logarithmes au numérateur et au dénominateur, et les variables de décision sont binaires et continues. Nous proposons de transformer ($MINLFP$) en un programme convexe non linéaire en variables mixtes ($MINLP$) dont la relaxation continue est bi-concave puis de le ré-écrire sous la forme d'un programme convexe non linéaire en variables mixtes ($MINLP_{sc}$) pour lequel la relaxation continue est simplement concave en substituant les termes croisés quadratiques présents à la fois dans la fonction objectif et dans les contraintes. Enfin, nous adaptons une méthode que nous avons précédement développée [5] dans un contexte de programme non linéaire convexe en variables entières.

## 2 Modélisation proposée

Le programme mathématique correspondant à la maximisation de l'EE sous contraintes de structure du réseau est le suivant :

$$
(MINLFP) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \eta_{EE} \\ s.c & \left| \begin{array}{ll} (C_1) : \sum_{m=1}^{M} \delta_{n,m,k} \leq 1 & \forall n \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K} \\ (C_2) : \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \delta_{n,m,k} p_{n,m,k} \leq p_n^{max} & \forall n \in \mathcal{N} \\ (C_3) : -R_m \leq -R_m^{th} & \forall m \in \mathcal{M} \\ 0 \leq p_{n,m,k} \leq p_n^{max} & \\ \delta_{n,m,k} \in \{0; 1\} & \\ p_{n,m,k} \in \mathbb{R} & \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

où $R_m^{th}$ et $p_n^{max}$ représentent respectivement le débit minimum nécessaire pour un client $m$ et la puissance totale maximale de transmission pour la station $n$. La contrainte $(C_1)$ signifie qu'une seule ressource est affectée à un client. Les contraintes $(C_2)$ et $(C_3)$ imposent une puissance totale de transmission pour chaque station et un débit nécessaire pour chaque client, respectivement. $\delta_{n,m,k}$ et $p_{n,m,k}$ sont les variables de décision du modèle, respectivement $0-1$ et réelle positive. Nous sommes donc confrontés à un programme non linéaire, fractionnaire, non concave en variables mixtes $(MINLFP)$. Bien entendu, il est possible que $(MINLFP)$ n'ait pas de solution admissible, et ce en raison des contraintes $(C_2)$ et $(C_3)$ qui peuvent être contradictoires. Pour éviter cet écueil nous avons ajusté ces contraintes, par exemple en diminuant le débit de certains utilisateurs pour rendre réalisable le problème.

## 3 Techniques de résolution proposées

Nous proposons de résoudre $(MINLFP)$ en le transformant dans un premier temps en un programme équivalent concave (*via* l'algorithme fourni par Dinkelbach [1]) fournissant une relaxation de $(MINLFP)$ puis ce programme concave est transformé en un programme non fractionnaire sans les produits des variables binaires par les variables réelles en un programme concave $(MINLP)$. Une étude expérimentale préliminaire a été menée. Bien entendu, $(MINLP_{sc})$ compte un nombre très important de variables et contraintes et sa résolution exacte demande un temps CPU (en secondes) bien plus important que si l'on accepte une solution approchée. Bonmin (solveur libre de programmes non linéaires en variables entières, développé par Bonami *et al.* 2012) a été employé dans les deux configurations concernant la premère voie de résolution. La deuxième technique a été testée avec l'utilisation de CPLEX 12.6 mais également de Bonmin.

## Références


[1] Dinkelbach, W. *On nonlinear fractional programming*, Management Sci. 13(7) 492-498 (1967)

[2] He, C. and Sheng, B. and Zhu, P. and You, X. and Li ,G. Y. *Energy- and spectral-efficiency tradeoff for distributed antenna systems with proportional fairness*, IEEE J. Sel. Areas Commun. 31(5) 894-902 (2013)

[3] Isheden, C. and Chong, Z. and Jorswieck, E.A. and Fettweis, G. *Framework for link-level energy efficiency optimization with informed transmitter*, IEEE Trans. Commun. 58(2) 545-554 (2010)

[4] Miao, G. and Himayat, N. and Li ,G. Y. *Energy-efficient link adaptation in frequency-selective channels*, IEEE Trans. Commun. 11(8) 2946-2957 (2012)

[5] Quadri D. and E. Soutil *Reformulation and solution approach for non-separable integer quadratic programs*, JORS 66(8) 1270-1280 (2015)