d-extensibles de stables dans les graphes bipartis

Grégoire Cotté[1], Marie-Christine Costa[2], Christophe Picouleau[3]

[1] Eurodecision, F-78000 Versailles, France
{gregoire.cotte}@eurodecision.com

[2] ENSTA-PARISTECH, UMA, F-91120 Palaiseau, France
{marie-christine.costa}@ensta-paristech.fr

[3] CNAM, CEDRIC, F-75003 Paris, France
{christophe.picouleau}@cnam.fr

Mots-clés : *d-extensible, ensemble stable, graphe biparti*

1 Introduction

Considérons un système dans lequel des composants peuvent tomber en panne. Il est possible de maintenir des éléments pour éviter les pannes mais cela a un coût. Pour que le bon fonctionnement ne soit pas affecté en cas de défaillance, on souhaite maintenir une partie aussi petite que possible du système pour qu'en cas de panne dans l'autre partie, le système puisse toujours opérer dans de bonnes conditions. Autrement dit, on veut sélectionner une partie aussi grande que possible du système qu'il ne sera pas nécessaire de maintenir, et ainsi protéger un minimum d'éléments sans perturber le bon fonctionnement du système.

Supposons que le système puisse être modélisé par un graphe $G = (V, E)$ dans lequel les sommets sont les composants et tel que le système ne fonctionne que si ces sommets forment un ensemble stable. Le système fonctionne tant qu'il existe un stable de cardinal maximal $\alpha(G)$. Soit d un entier tel que $0 \leq d \leq \alpha(G)$. On souhaite déterminer le plus grand ensemble de sommets F tel que tout stable de cardinal d de $G[F]$ peut être complété en un stable optimal de G à l'aide de sommets de $V - F$. Ce problème est une variation des problèmes d'extension de couplage ([1], [3], [4], [5]).

2 Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On définit une partition de l'ensemble des sommets de G :

- Les sommets *forcés* sont les sommets qui appartiennent à tous les stables de cardinal maximal de G. L'ensemble des sommets forcés est noté $\Xi(G)$.
- Les sommets *exclus* sont les sommets qui n'appartiennent à aucun stable de cardinal maximal de G. L'ensemble des sommets exclus est noté $\Psi(G)$.
- Les sommets *libres* sont les sommets qui ne sont ni forcés ni exclus. L'ensemble des sommets libres est noté $\Phi(G)$. Le nombre de sommets libres est noté $\phi(G) = |\Phi(G)|$.

Les sommets exclus n'appartiennent à aucun stable de cardinal maximal. Ils ne peuvent donc pas être utilisés pour étendre un stable et ne peuvent pas être contenus dans un stable de cardinal d d'un d-extensible. On peut donc les retirer du graphe. Dans les sections suivantes, les graphes ne contiennent plus de sommets exclus. Remarquons qu'alors les sommets forcés sont des sommets isolés.

Pour tout sommet $u \in V$ on note $\Gamma(u)$ l'ensemble de ses voisins. Pour tout sous-ensemble $\hat{V} \subset V$ on note $\Gamma(\hat{V})$ l'ensemble des voisins des sommets de $\hat{V}$ qui n'appartiennent pas à $\hat{V}$.

Soit $F \subset V$. Un stable $S \subset F$ de G est dit *extensible par rapport à* F si il existe $\widehat{S} \subset (V - F)$ tel que $S \cup \widehat{S}$ est un stable de cardinal maximal de G.

Soit un entier d tel que $1 \leq d < \alpha(G)$. Un ensemble $F \subset V$ est un d-extensible de G si tout stable S de $G[F]$ de cardinal d est extensible par rapport à F.

3 Une caractérisation des stables dans les graphes bipartis

Nous présentons ici une caractérisation des stables de cardinal maximal issue de [2] qui sera utilisée dans les sections suivantes.

Propriété 1 *[2] Soit un graphe biparti $G = (B, R, E)$ dont tous les sommets sont libres. Il existe une partition $\{V_1, ..., V_K\}$ des sommets de G telle que $|B \cap V_i| = |R \cap V_i|$ et pour tout stable de cardinal maximal S^* de G, soit $S^* \cap V_i = R \cap V_i$, soit $S^* \cap V_i = B \cap V_i$.*

On note $C_i = G[V_i]$ le sous-graphe de G induit par l'ensemble V_i. Le sous-graphe C_i est appelé une *composante* de G. Construisons le graphe orienté $G_c = (V_c, A_c)$ de la façon suivante : V_c=$\{C_i\ \forall i = 1, ..., K\}$, $A_c = \{(C_i, C_j)$ tel que $i \neq j$ et il existe $xy \in E$ avec $x \in V_i \cap B$ et $y \in V_j \cap R\ \}$. Ce graphe est appelé *graphe des composantes* de G.

Pour tout sommet x de G on note $C(x)$ la composante qui contient le sommet x. Soient deux composantes $C(x)$ et $C(y)$ de G_c. On note $C(x) \rightarrow C(y)$ le fait qu'il existe un chemin de $C(x)$ à $C(y)$ dans G_c, le chemin pouvant être de longueur nulle si $C(x) = C(y)$. On note $V(C_i)$ l'ensemble des sommets contenus dans la composante C_i.

Propriété 2 *[2] Soient S^* un stable de cardinal maximal de G et x et y deux sommets de S^* tels que $C(x) \rightarrow C(y)$. Si $x \in B$ alors $y \in B$. Si $y \in R$ alors $x \in R$.*

4 d-extensibles de stables dans les graphes bipartis

Dans cette section, nous nous intéressons aux d-extensibles dans les graphes bipartis. Après avoir donné quelques propriétés structurelles, nous déterminons une borne inférieure du cardinal maximal d'un d-extensible, puis nous décrivons des cas particuliers polynomiaux.

4.1 Graphes bipartis dont tous les sommets sont libres

Dans cette section, on considère un graphe biparti $G = (B, R, E)$ dont tous les sommets sont libres.

Propriété 3 *Soit $F \subset (B \cup R)$. Un stable $S \subset F$ est extensible par rapport à F si et seulement si pour tout couple de sommets (x, y) de G tels que $C(x) \rightarrow C(y)$, on a*

1. *si $x \in S \cap B$ et $y \in F \cap B$ alors $y \in S$*
2. *si $x \in F \cap R$ et $y \in S \cap R$ alors $x \in S$*
3. *si $x \in F \cap R$ et $y \in F \cap B$ alors $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$*
4. *si $x \in F \cap B$ et $y \in F \cap R$ alors $|S \cap \{x, y\}| \leq 1$*

Preuve : (idée de la preuve)

Soit S un stable extensible par rapport à F. Comme S est extensible, $\exists\ S^*$ stable optimal de G tel que $S^* \cap F = S$. Soit un couple de sommets (x, y) de G tels que $C(x) \rightarrow C(y)$.

Supposons que $x \in S \cap B$ et $y \in F \cap B$. D'après la Propriété 2, si $x \in S^*$ alors $y \in S^*$. Or $S^* \cap F = S$ donc $y \in S$. Le premier point est donc vérifié.

Les autres points sont démontrés de façon similaire.

Dans la suite de la preuve, nous considérons un stable S de $G[F]$ qui respecte les quatre points de la propriété et montrons qu'il est extensible par rapport à F. Pour cela, nous construisons un stable S^* optimal de G tel que $S^* \cap F = S$.

$\square$

À l'aide de la propriété précédente, on peut facilement démontrer les deux propriétés suivantes.

Propriété 4 *Pour $d \geq 2$, si $F \subset (B \cup R)$ est un d-extensible de G alors il est aussi un k-extensible de G pour $k > d$.*

Propriété 5 *$F \subset (B \cup R)$ est un d-extensible de G si et seulement si pour tout couple (x, y) de sommets de F tels que $C(x) \to C(y)$*

— *Si $C(x) \neq C(y)$ et $(xy) \notin E$:*
  1. *Si $x \in R$ et $y \in B$ alors $\alpha(G[F - \{x, y\}]) < d$*
  2. *Si $x \in B$ et $y \in B$ alors $\alpha(G[F - (\{y\} \cup \Gamma(x))]) < d$*
  3. *Si $x \in R$ et $y \in R$ alors $\alpha(G[F - (\{x\} \cup \Gamma(y))]) < d$*
  4. *Si $x \in B$ et $y \in R$ alors $\alpha(G[F - (\Gamma(x) \cup \Gamma(y))]) < d$*

— *Si $C(x) = C(y)$:*
  1. *Si $x \in B$ et $y \in B$ alors $\alpha(G[F - (\{y\} \cup \Gamma(x))]) < d$ et $\alpha(G[F - (\{x\} \cup \Gamma(y))]) < d$*
  2. *Si $x \in R$ et $y \in R$ alors $\alpha(G[F - (\{y\} \cup \Gamma(x))]) < d$ et $\alpha(G[F - (\{x\} \cup \Gamma(y))]) < d$*
  3. *Si $x \in B$ et $y \in R$ ou $x \in R$ et $y \in B$ alors $\alpha(G[F - \{x, y\}]) < d$ et, si $xy \notin E$ alors $\alpha(G[F - (\Gamma(x) \cup \Gamma(y)]) < d$*

La Propriété suivante fournit une borne inférieure du cardinal maximal d'un d-extensible.

Propriété 6 *Soit G=(B,R,E) un graphe biparti tel que G_c vérifie $|V_c| = 1$. Il existe un d-extensible F vérifiant $|F| = 2d - 1$.*

Preuve : (idée de la preuve)
Dans cette démonstration, nous construisons un ensemble F tel que $|F| = 2d - 1$ puis, à l'aide de la Propriété 5, nous prouvons que c'est bien un d-extensible.

□

La propriété suivante considère le cas de classes particulière de graphe est est démontrée à l'aide de la Propriété 5.

Propriété 7 *Déterminer un d-extensible peut être réalisé en temps polynomial :*

— *dans une grille*

— *dans un cycle*

La propriété suivante considère une classe particulière de graphe dans le cas $d = 1$. Elle est démontrée à l'aide de la modélisation par la programmation mathématique en nombre entier qui, dans ce cas, aboutit à un programme mathématique pour lequel la matrice est totalement unimodulaire.

Propriété 8 *Soit $G = (B, R, E)$ un graphe dont tous les sommets sont libres. Si G_c est un arbre, alors trouver un 1-extensible optimal de G est un problème polynomial.*

4.2 Graphes bipartis contenant des sommets forcés

Dans cette section, on considère un graphe biparti $G(B, R, E)$ qui contient des sommets libres et des sommets forcés. Rappelons que les sommets exclus ont été retirés. Les sommets forcés sont donc isolés. Les propriétés de cette section se démontre à l'aide de la caractérisation des stables dans les graphes bipartis.

Propriété 9 *Soit F un d-extensible de G. Si $F \cap \Xi(G) \neq \emptyset$ alors $|F| \leq 2d - |F \cap \Xi(G)|$.*

D'après la Propriété 6 , on sait qu'il existe un d-extensible de G de cardinal $2d - 1$. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Si $d \leq \frac{\phi(G)}{2}$ alors il existe un d-extensible optimal F de G tel que $F \subset \Phi(G)$.*

Propriété 10 *Si $d \geq \frac{\phi(G)}{2}$ alors il existe un d-extensible optimal F^* de G est formé de tous les sommets libres de G et de $(d - \frac{\phi(G)}{2})$ sommets forcés. Ainsi $|F^*| = d + \frac{\phi(G)}{2}$*

5 d-extensibles de stables dans les arbres

Dans cette section, on considère un arbre $G = (B, R, E)$ dont tous les sommets sont libres, donc $\alpha(G) = |B| = |R|$. Dans ce cas, G_c est un arbre orienté et les composantes C_i de G contiennent deux sommets : un sommet de B et un sommet de R.

La propriété suivante se démontre de la même façon que la Propriété 6 et fournit une autre borne inférieure du cardinal maximal d'un d-extensible. La propriété qui suit porte sur la structure des d-extensibles dans les arbres. Enfin, la dernière propriété s'intéresse à des cas particuliers polynomiaux.

Notons que le cas des 1-extensibles dans les arbres est traité par la Propriété 8.

Propriété 11 *Tout d-extensible optimal F^* de G vérifie $|F^*| \geq 2d$*

Les propriétés suivantes sont démontrées à l'aide des Propriétés 3 et 5.

Propriété 12 *Soit F un d-extensible de G tel que $|F| > 2d$.*
- *Pour toute composante C de G, $|V(C) \cap F| \leq 1$.*
- *Soient x, y deux sommets de F. Si $C(x) \to C(y)$, $C(x) \neq C(y)$ et si $x \in R$ alors $y \notin B$.*

Propriété 13 *Déterminer un d-extensible de cardinal maximal est un problème polynomial dans les cas suivants :*
- *G_c est une arborescence*
- *G_c est constitué d'une arborescence et d'une anti-arborescence*
- *Si l'arbre est un homard*

6 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé une caractérisation des stables extensibles et des d-extensibles dans les graphes bipartis, ainsi que des bornes inférieures du cardinal maximal d'un d-extensible dans le cas d'un graphe biparti quelconque et dans le cas d'un arbre. Des cas particuliers ont été résolus, les grilles, les cycles et certaines classes d'arbres comme les homards. Si le graphe biparti contient des sommets forcés, nous avons montré comment déterminer un d-extensible optimal pour $d \geq \frac{\phi(G)}{2}$. Nous avons également montré que pour les graphes bipartis dont le graphe des composantes est un arbre, déterminer un 1-extensible optimal est un problème polynomial.

Le problème reste ouvert dans de nombreux cas si $d \leq \frac{\phi(G)}{2}$. Pour les graphes bipartis quelconques, le problème est encore ouvert. C'est aussi le cas dans les arbres si $d > 1$.

Références

[1] Robert EL Aldred and Michael D Plummer. On matching extensions with prescribed and proscribed edge sets ii. *Discrete mathematics*, 197 :29–40, 1999.

[2] Cédric Bentz, M-C Costa, Christophe Picouleau, Bernard Ries, and Dominique De Werra. d-transversals of stable sets and vertex covers in weighted bipartite graphs. *Journal of Discrete Algorithms*, 17 :95–102, 2012.

[3] Sebastian M Cioabă and Weiqiang Li. The extendability of matchings in strongly regular graphs. *the electronic journal of combinatorics*, 21(2) :P2–34, 2014.

[4] M.-C. Costa, C. Picouleau, and D. de Werra. Minimal graphs for matching extensions. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2015.

[5] Michael D Plummer. Extending matchings in graphs : a survey. *Discrete Mathematics*, 127(1) :277–292, 1994.