Estimation bayésienne dans le système d'attente $Er/M/1$

Hayette Braham[1], Louiza Berdjoudj[2], Mohamed Boualem[2]

[1] Laboratoire de Mathématiques Appliquées LMA
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie
braham_hayet@hotmail.fr

[2] Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie
l_berdjoudj@yahoo.fr, robertt15dz@yahoo.fr
http ://www.lamos.org

Mots-clés : *le système $Er/M/1$, estimation bayésienne, distribution stationnaire, mesures de performance, méthodes MCMC.*

1 Introduction

La théorie des files d'attente remonte aux travaux d'Erlang (1909). La première publication sur l'inférence statistique dans les files d'attente est dûe à Clarke (1957). L'analyse bayésienne dans systèmes d'attente remonte aux années 70 voir par exemple Muddapur (1972) [5], pour les avantages des approches bayésiennes pour les modèles markoviens, le lecteur peut se référer aux articles de Armero et Bayarri (1994, 1997)[1, 2].

Récemment, les problèmes à modéliser sont devenus plus complexes et des distributions plus générales ont été envisagées pour les temps inter-arrivées et les durées de services voir Kannan et Jabarali (2014, 2015) [3, 4]. Wiper, dans son article [6] a illustré l'inférence bayésienne des systèmes Er/M/1 et Er/M/c en utilisant des méthodes numériques d'approximation. Dans notre travail, nous considérons l'analyse bayésienne du système Er/M/1 en utilisant les méthodes de Monté Carlo par chaînes de Markov (MCMC).

Le choix de ce modèle est motivé par le fait que la loi Erlang est largement utilisée dans la modélisation des problèmes des centres d'appels et de télécommunication et ceci est dû à son coefficient de variation qui est inférieur à un.

L'objectif principal de cet article est d'estimer les paramètres de la distribution des inter-arrivées k et λ ainsi que le paramètre de la durée de service μ par la méthode bayésienne, puis estimer la distribution stationnaire et les mesures de performances du système considéré. Les méthodes MCMC sont utilisées pour avoir des échantillons des distributions a posteriori des paramètres estimés.

2 Distribution stationnaire du système

Considérons le système de file d'attente Er/M/1, où les temps inter-arrivées sont des v.a. indépendantes de loi Erlang et les durées de services sont exponentielle de moyenne $1/\mu$. La distribution limite du nombre de clients dans le système à l'instant d'une arrivée aléatoire est donnée par : $\pi_i = (1-\sigma)\sigma^i, \quad i \geq 0$ où σ est l'unique valeur satisfaisant :

$$\sigma = \left(\frac{\lambda}{\mu(1-\sigma)+\lambda}\right)^k, \qquad 0 < \sigma < 1. \tag{1}$$

3 Estimation des paramètres

Pour résoudre l'équation (1) et trouver σ, on procède à l'estimation bayésienne des paramètres du système à savoir : k, λ et μ. Pour μ, on considère la loi gamma comme a priori et on trouve que la loi a posteriori aussi est une gamma. Par ailleurs, on considère une loi a priori jointe pour les deux paramètres k et λ et on trouve que sachant k, la loi a posteriori de λ est une Erlang, par contre pour k, la loi a posteriori trouvée n'est pas une loi connue.

Les méthodes MCMC

Les méthodes MCMC nous permettent de simuler suivant les lois a posteriori trouvées vu que celle de k n'est pas une loi connue et donc pas facilement simulable. Deux algorithmes de Metropolis-Hastings ont été conçu sous MatLab, le premier pour les deux paramètres des inter-arrivées k et λ et le deuxième pour le paramètre des temps de service μ. La loi condidate utilisée pour k est une Poisson et pour λ et μ c'est une gamma.

4 Application numérique

Pour une meilleure illustration de la démarche suivie dans notre article, nous avons considéré plusieurs cas pour les inter-arrivées et les temps de service. Dans chaque cas, les estimateurs des paramètres du système sont donnés par la moyenne empirique des chaînes de Markov résultantes des deux algorithmes Metropolis-Hastings, ensuite on résoud l'équation (1) pour trouver σ, ainsi toutes les caractéristiques du système sont déduites. La charge du système est aussi maintenue dans chaque cas considéré.

5 Conclusions

Dans notre travail, nous nous sommes intéressé au système de file d'attente $Er/M/1$, l'erreur de Monte Carlo a été minimale pour chaque estimateur trouvé, ce qui confirme la convergence des chaines de Markov obtenues avec les deux algorithmes de simulation vers les lois cibles. Le calcul des mesures de performance du système nous a permis de constater que le temps moyen d'attente et le nombre moyen de clients (dans la file et dans le système) diminuent lorsque les valeurs des paramètres k, λ et μ augmentent.

Références

[1] Armero, C. and Bayarri, M.J. Bayesian prediction in M/M/1 queue. *Queueing Systems*, (15), 401-417, 1994.

[2] Armero, C. and Bayarri, M.J. A bayesian analysis of a queueing system with unlimited service. *J. Statistical Planning and Inference*, (58), 241-261, 1997.

[3] Jabarali, A. and Kannan, K. S. Bayesian queueing model with multiple working vacations under Gumbel distribution. *Applied Mathematical Sciences*, 9(48), 2363-2369, 2015.

[4] Kannan, K. S. and Jabarali, A. Estimation on single server queueing model with working vacations, Research and Reviews. *Journal of Statistics (Special Issue on Recent Statistical Methodologies andApplications)*, (2), 94-98, 2014.

[5] Muddapur, M.V. Bayesian estimators of parameters in some queueing models. *Annals of the Institute of Mathematics*, (24) : 327–331, 1972.

[6] Wiper, M.P. Bayesian analysis of Er/M/1 and Er/M/c queues. *J. Statistical Planning and Inference*, (69) :65–79, 1998.