Analyse de la sensibilité de l'optimum pour le problème du partage équitable généralisé : perturbation du poids

[1] Ferhan Al-Maliky, Mhand Hifi, Hedi Mhalla

Unité de Recherche EPROAD Equip ROAD, Université de Picardie Jules Verne
7 rue de Moulin Neuf, 80000
{ferhan.al.maliky, hifi, hedi.mhalla }@u-picardie.fr

Mots-cls : *knapsack, optimisation, perturbation, sensibilité.*

1 Introduction

Nous nous intéressons à l'analyse de la sensibilité de l'optimum du problème de partage équitable généralisé (GKSP). Nous proposons d'analyser la sensibilité de l'optimum (voir Blair [4], Gosh *et al.* [5], Hifi et al. [6], et Belgacem et Hifi [3]) lorsque des perturbations sont imposées sur un poids d'un item du GKSP. Il s'agit principalement de déterminer les limites caractérisant des intervalles de la sensibilité pour lesquels une solution optimale du GKSP reste stable pour le problème perturbé. Par la suite, nous proposons un algorithme permettant de déterminer les limites de ses intervalles de sensibilité pour chacun des éléments perturbés.

2 Le problème

Le problème étudié peut être considéré comme une variante du knapsack classique. Comme tous les problèmes de ce type, il est représenté par une capacité c et par un ensemble J composé de n items (objets). A chaque item $j \in J$, sont associés un profit p_j et un poids w_j. De plus, l'ensemble J des items est partitionné en $s+1$ sous-ensembles disjoints $J_0,\ J_1,\ldots,\ J_s$, où J_0 est appelée l'ensemble des éléments communs, et $J_I = \cup_{r=1}^{s} J_r$ est l'ensemble des éléments individuels. On cherche alors à maximiser la valeur minimale des profits sur toutes les classes en respectant la contrainte de capacité : la somme des poids des objets choisis ne doit pas dépasser la capacité c. Alors le GKSP peut être formulé comme suit :

$$\text{GKSP}\begin{cases} \max & z(x) := \min\limits_{1\leq r\leq s} \{P^r(x)\} + P^0(x) \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{j\in J} w_j x_j \leq c\ , \\ & x_j \in \{0,1\},\ j \in J, \end{cases}$$

où $P^r(x) = \sum_{j\in J_r} p_j x_j$. Le GKSP est décomposé en deux sous-problèmes complémentaires. Le premier est un problème du knapsack (noté KP) et le second est le problème du partage équitable, noté KSP (voir Fujimoto et Yamada [1]). D'une part, le problème KP peut être formulé comme suit :

$$\text{KP} = \left\{ max\ P^0(x) \mid \sum_{j\in J_0} w_j x_j \leq c, \quad x_j \in \{0,1\}, j \in J_0 \right\}.$$

D'autre part, le KSP peut être présenté comme suit :

$$\text{KSP} = \left\{ max\ min_{1\leq r\leq s}\ \{P^r(x)\} \mid \sum_{j\in J_I} w_j x_j \leq c, \qquad x_j \in \{0,1\}, j \in J_I \right\}.$$

Les deux problèmes KP et KSP représentent respectivement l'ensemble des éléments communs J_0 et l'ensemble des éléments individuels J_I. Hifi et Sadfi [2] ont proposé une décomposition du problème KSP en une série de problèmes de knapsack, notés $KP_{J_r}^{\overline{c}_r}$ pour $r = 1, ..., s$, qui sont associés aux s classes du problème KSP, définis par :

$$KP_{J_r}^{\overline{c}_r} = \left\{ max\ min \sum_{j \in J_r} p_j x_j \mid \sum_{j \in j_r} w_j x_j \leq \overline{c}_r, x_j \in \{0, 1\},\ j \in J_r \right\},$$

où les $\overline{c}_r$, $r \in \{1, ..., s\}$, sont des entiers positifs. Dans ce qui suit, on suppose que l'on dispose d'une solution optimale de l'instance du GKSP, notée $\overline{x}$.

3 Analyse de la sensibilité

Considérons maintenant une instances GKSP$'$ du même problème, où un poids d'un item k est perturbé, i.e., le poids w_k est remplacé par $w_k + \Delta_k$. Alors, nous nous posons les questions suivantes :

(i) Est-ce-que $\overline{x}$ reste une solution optimale pour l'instance perturbée ?

(ii) Jusqu'à quelle limite w_k peut varier pour que $\overline{x}$ reste une solution optimale ?

Par ailleurs, afin de répondre à ces question, nous commençons tout d'abord par donner les relations liant les domaines de la réalisabilité des solutions et les valeurs des fonctions objectif des deux problèmes GKSP et GKSP$'$. Par la suite, nous établissons des résultats théoriques permettant d'établir des intervalles de sensibilité pour la perturbation d'un poids d'un élément quelconque k. Finalement, Afin de déterminer les limites de l'intervalle de sensibilité, nous distinguons les deux cas suivants :

Cas (i) l'élément k appartient à l'ensemble des éléments communs J_0.

Cas (ii) l'élément k appartient à l'ensemble des éléments individuels J_I.

Considérons maintenant ℓ l'indice d'une classe optimale pour le problème KSP qui satisfait : $\forall r \in \{1, 2, ..., s\}, r \neq \ell, VO(KSP) = VO(KP_{j_\ell}^{\overline{c}_\ell}) \leq VO(KP_{j_r}^{\overline{c}_r})$. Alors, de nouveau, si k appartient à l'ensemble des éléments individuels J_I, deux sous-cas sont considérés :

(i) k appartient à la classe optimale ℓ.

(ii) k appartient 'a la classe non optimale $t \neq \ell$.

Nous utiliserons, dans notre étude, certains résultats existant (cf. Hifi *et al.* [3, 6]) afin de déterminer les limites −inférieures et supérieures− des intervalles de la sensibilité pour le problème du GKSP. Pour cela, nous donnons une condition suffisante pour que la solution optimale $\overline{x}$ reste stable pour le problème perturbé.

Références

[1] Fujimoto M. and Yamada T., 2006. An exact algorithm for the knapsack sharing problem with common items. European Journal of Operational Research, 707 : 171-693.

[2] Hifi M. and Sadfi S., 2002. The knapsack sharing problem : an exact algorithm. Journal of Combinatorial Optimization, 6 : 35-54.

[3] Belgacem, T., and Hifi, M. 2008. Sensitivity analysis of the knapsack sharing problem : perturbation of the weight of an item. Computers and Operations Research, 35(1), 295-308.

[4] Blair C., 1998. Sensitivity analysis of knapsack problems : a negative result. Discrete Applied Mathematics, 81 : 133-139.

[5] Ghosh D., Charkravarti, D. and Sierksma G., 2006. Sensitivity analysis of a greedy heuristic for knapsack problems. European Journal of Operational Research, 169 : 340-350.

[6] Hifi M., Mhalla H. and Sadfi, S, 2005. Sensitivity of the optimum to perturbations of the profit or weight of an item in the binary knapsack problem. Journal of Combinatorial Optimization, 10 : 239-260.