Classification des graphes lambda-mous

Jean-Guy Caputo, Arnaud Knippel

Laboratoire de Mathématiques de l'INSA Rouen Normandie, France
{caputo,arnaud.knippel}@insa-rouen.fr

Mots-clés : *Graphes, Calcul spectral.*

1 Introduction

Nous nous plaçons dans le contexte de phénomènes physiques d'oscillation dans des réseaux (typiquement des réseaux électriques ou des systèmes mécaniques). Ces phénomènes sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles associées à un graphe, et le comportement du système est lié à la matrice de Laplacien du graphe L=D-A, où D est une matrice diagonale des degrés et A est une matrice d'adjacence). Dans le cas de systèmes linéaires, on se ramène à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de L. Lorsque les phénomènes étudiés ne sont pas linéaires, une approche consiste à projeter sur une base de vecteurs propres.

En fonction du graphe, il peut arriver qu'une composante d'un vecteur propre soit nulle : nous appelons noeud mou le sommet du graphe correspondant, car agir sur ce noeud n'a aucune influence sur le réseau pour le mode correspondant à la valeur propre en régime linéaire. Nous nous intéressons à la détection de tels noeuds. Calculer une valeur propre ne peut pas se faire de façon exacte dans tous les cas, et les résultats généraux existant sur les valeurs propres de graphes donnent généralement des bornes (voir par exemple [2]). Nous montrons qu'on peut déterminer certaines configurations précises de sous-graphes qui entraînent automatiquement la présence de noeuds mous pour des valeurs propres qui dépendent uniquement de ces sous-graphes.

Nous montrons quelques exemples de telles configurations, ainsi qu'un résultat général sur les graphes ayant un point d'articulation. Ce résultat nous amène à définir la notion de graphe lambda mou minimal, puis à proposer une classification de graphes lambda-mous en nous appuyant sur des transformations qui permettent de passer d'un graphe lambda-mou à un autre graphe lambda-mou pour la même valeur propre.

2 Noeuds mous

Dans [1], nous avons défini la notion de nœud mou. Etant donné un graphe G non orienté, un nœud i est dit mou s'il existe un vecteur propre du laplacien du graphe ayant la composante i nulle. Un nœud i est dit absolument mou s'il existe une valeur propre du laplacien de graphe telle que tous les vecteurs propres associés ont leur i-ième composante nulle.

La notion de nœud mou est relative à une valeur propre, et les deux définitions (nœuds mous et nœuds mous absolus) coïncident en cas de valeur propre simple. En cas de valeur propre multiples, toute coordonnée peut être annulée (avec la bonne combinaison linéaire de vecteurs propres) et la question intéressante devient : combien peut-on avoir de composantes nulles simultanément. Cette dernière question est critique pour les applications où on veut pouvoir affecter le comportement du réseau par des équipements installés au niveau des nœuds. Par exemple dans le cas d'un cycle, on montre qu'au plus deux nœuds peuvent avoir une valeur nulle simultanément.

3 Graphes lambda-mous et classification pour les petits graphes

Dans [1] nous montrons deux configurations particulières qui donnent des nœuds mous. Pour généraliser ces résultats, nous nous intéressons à un graphe G formé de deux graphes G1 et G2 reliés par un point d'articulation. Nous remarquons alors qu'un vecteur propre du Laplacien du graphe G avec des composantes nulles pour les sommets autres que ceux de G1 peut être obtenu à partir d'un vecteur propre du graphe G1. En conséquence, si on a un nœud mou pour la valeur propre λ, on peut étendre le graphe à partir de ce nœud (en le connectant à n'importe quel autre graphe) et le nœud restera mou pour la même valeur propre, les nouveaux nœuds étant mous aussi.

Nous définissons de façon similaire plusieurs transformations permettant de passer d'un graphe mou à un autre, pour la même valeur propre, et nous nous intéressons alors à la notion de graphe lambda-mous minimal : un graphe G est λ-mou minimal s'il est un plus petit graphe au sens de l'inclusion pour lequel λ donne un nœud mou. Nous dressons une classification des graphes lambda-mous de petite taille en nous appuyant sur les transformations identifiées pour faire apparaître une structure entre ces graphes. La classification des graphes lambda-mous minimaux vise à construire les graphes lambda-mous de façon combinatoire.

4 Remerciements

Ce travail fait partie du projet XTERM cofinancé par l'Union Européenne à travers le Fond Européen de Développement Régional (FEDER) et par la Région Normandie.

Références

[1] J-G Caputo, A. Knippel, E. Semo, Oscillations of networks: the role of soft nodes, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical (46) 2013.

[2] D. Cvetkovic, P. Rowlinson and S. Simic, ”An Introduction to the Theory of Graph Spectra”, London Mathematical Society Student Texts (No. 75), (2001)