Etude polyédrale du problème de séparateur de sommets

Ibrahima Diarrassouba[1], Mohamed Didi Biha[2], Cédric Joncour[1], Sophie Michel[1]

[1] Normandie Univ, UNIHAVRE, LMAH, 76600 Le Havre, France
{ibrahima.diarrassouba,cedric.joncour,sophie.michel}@univ-lehavre.fr
[2] Normandie Univ, UNICAEN, LMNO, 14000 Caen, France
{mohamed.didi-biha}@unicaen.fr

Mots-clés : *séparateur de sommets minimum, approche polyédrale, Branch-and-Cut.*

Soit $G := (V, E)$ un graphe non orienté simple, connexe. Un séparateur de sommets du graphe G est une partie S non vide de V dont la suppression déconnecte le graphe G. Etant donné $\beta \in \mathbb{N}^*$, le problème du séparateur de sommets minimum consiste à déterminer une partition (A, B, S) de V dont le cardinal de S est minimum, et telle que S est un séparateur de G, $1 \leq |A|, |B| \leq \beta$ et

$$\delta(A, B) = \emptyset, \quad \text{où } \delta(A, B) := \{uv \in E : u \in A, v \in B\}.$$

Ce problème est un problème d'optimisation combinatoire classique, dont le problème décisionnel est $\mathcal{NP}$-complet.

Notons $x \in \{0,1\}^{|V|}$ le vecteur d'appartenance à la partie A et $y \in \{0,1\}^{|V|}$ le vecteur d'appartenance à la partie B. Le problème peut être formulé par le programme linéaire en nombre entier suivant :

$$\begin{array}{lcll}
\max & \sum_{u\in V} x_u + y_u, & & (1)\\
\text{tel que} & x_u + y_u \leq 1 & \forall u \in V, & (2)\\
& x_u + y_v \leq 1, & \forall uv \in E, & (3)\\
& x_v + y_u \leq 1, & \forall uv \in E, & (4)\\
& 1 \leq \sum_{u\in V} x_u \leq \beta, & & (5)\\
& 1 \leq \sum_{u\in V} y_u \leq \beta, & & (6)\\
& x_u \in \{0,1\}, & \forall u \in V, & (7)\\
& y_u \geq 0, & \forall u \in V. & (8)
\end{array}$$

Plusieurs approches polyédrales basées sur cette formulation ont déjà été proposées [1, 2, 3, 4]. Durant ce travail, nous proposons une étude détaillée du polyèdre associé à cette formulation. Nous introduisons plusieurs nouvelles familles d'inégalités valides et étudions les conditions sous lesquels celles-ci définissent des facettes.

Références

[1] Balas and de Souza. The vertex separator problem : a polyhedral investigation. *Mathematical Programming*, Serie A, 103 :583–608, 2005.

[2] Balas and de Souza. The vertex separator problem : algorithms and computation. *Mathematical Programming*, Serie A, 103 :609–631, 2015.

[3] Calvalcante and de Souza. Exact Algorithms for the Vertex Separator Problem in Graphs. *Networks*, 212–230, 2011.

[4] M. Didi Biha and M.-J. Meurs. An Exact Algorithm for Solving the Vertex Separator Problem. *Journal of Global Optimization*, 49(3) :425–434, 2011.